



1.55.



56725 | III

5673 s

51

ZBIORY ŚLĄSKIE

Akc K Nr 325 / 72 / S

Die Elementar-Mathematik,

für

den Schulunterricht bearbeitet

von

Professor Dr. Ludwig Kambly.

Vollständig in vier Theilen:

Erster Theil.

Arithmetik und Algebra.

Zweiter Theil.

Planimetrie.



Dritter Theil.

Ebene u. sphärische Trigonometrie

Vierter Theil.

Stereometrie.

Dritter Theil:

Ebene und sphärische Trigonometrie.

Nebst Übungsaufgaben.

22. (Stereotyp-)Auflage.

Mit einer Tafel lithographirter Abbildungen.

Ferdinand Hirt,

Königliche Universitäts- und Verlags-Buchhandlung.

Breslau, 1894.

Alle Rechte vorbehalten.

Vorwort zur Trigonometrie.

Obgleich schon aus den Titeln und Vorreden der beiden ersten Bändchen meiner Elementar-Mathematik zur genüge erhellt, daß dieselbe nur ein Leitfaden für die Schule, nicht ein ausführliches Lehrbuch für den Selbstunterricht, noch weniger aber — da beide Zwecke schwerlich vereinbar sind — beides zugleich sein soll: so kann ich doch nicht umhin, es an dieser Stelle nochmals ausdrücklich hervorzuheben, daß ich in der ebenen Trigonometrie mehr als in den übrigen Theilen des Werkes der Erörterung des Lehrers und der von einem Lehrer geleiteten eigenen Thätigkeit der Schüler überlassen zu dürfen glaube. Das letztere konnte namentlich in der Goniometrie geschehen, weil ich bei ihrer Darstellung so viel als möglich die analytische Methode gewählt habe, welche leicht zu fassen und so leicht zu handhaben ist, daß für die meisten Entwicklungen schon einige wenige Andeutungen vollständig ausreichen, und alle Erweiterungen von Formeln (z. B. auf Winkel über 180° , auf mehrtheilige Winkelsummen, auf Vielfache von Winkeln u. s. w.) ohne Bedenken dem Schüler zugemutet werden können. Aus diesem Grunde scheint mir das analytische Verfahren für die Goniometrie, welche ja ihres analytischen Charakters wegen auch die analytische Trigonometrie genannt wird, das einzig richtige und geeignete zu sein. Die Besorgnis, daß dasselbe wegen Mangels an Anschaulichkeit nicht leicht zu einem vollen Verständnis gelangen lasse, kann ich nicht teilen, und ebenso wenig der hier und da laut gewordenen Klage beistimmen, daß es den Lernenden in der Regel schwer werde, sich einige Sicherheit in der Kenntnis und Anwendung der trigonometrischen Lehren zu erwerben. Denn meiner ganzen bisherigen Erfahrung zufolge ist es gerade vorzugsweise die Trigonometrie, welche das Interesse der Schüler lebhaft anzuregen und zu fesseln pflegt, und die deshalb von den meisten rasch und sicher erlernt und als ein zuverlässiger Besitz lange festgehalten wird.

Daß ich in der Erklärung der trigonometrischen Linien und Funktionen von dem Kreise ausgehe und die gewonnenen Bestimmungen auf das rechtwinklige Dreieck nur um seiner Auflösung willen übertrage, geschieht vornehmlich deswegen, weil bei dem umgekehrten Gange die fundamentalen Begriffe sich auf Winkel über 90° schwerlich ohne Härte erweitern lassen. Auch bin ich der Meinung, daß die Goniometrie sich bei der gewählten Anordnung des Stoffes sehr ungezwungen, und ohne die Entwicklung zu unterbrechen, zwischen die Planimetrie und die eigentliche Trigonometrie als vermittelndes Glied hinstellt.

So viel zur Rechtfertigung des Ganges, für welchen ich mich entschieden habe, und der von der Mehrzahl der neueren Mathematiker, meines Erachtens ohne genügende Gründe, ja mit Unrecht verlassen worden ist. Nur ein Vorwurf trifft die meisten der älteren Mathematiker, welche sämtlich vom Kreise ausgehen, mit Recht: daß sie nämlich Sinus, Cosinus, Tangens, Cotangens u. s. w. stets als Linien betrachten, welche nur dadurch, daß der Radius des Kreises der Einheit gleichgesetzt wird, numerische Werte

erlangen. Vor dieser Vermengung der trigonometrischen Linien und Funktionen glaubte ich nicht nachdrücklich genug mich erklären zu können, um so mehr, als selbst Legendre und Lacroix sich jenes Sehlers schuldig gemacht haben, der alsdann unter ihrer Autorität in nicht wenige deutsche Lehrbücher der Trigonometrie übergegangen ist.

Die auf dem Ptolemäischen Lehrsatze beruhenden Beweise der in § 12 und § 14 befindlichen Formeln habe ich nur in einer Anmerkung den Hauptzügen nach angedeutet, da sie, wenn gleich sehr elegant, doch der sonst festgehaltenen Methode fremdartig sind und nur für spitze Winkel Geltung haben.

Daß die Entwicklung der trigonometrischen Reihen nicht in den Bereich des Schulunterrichts gehört, glaube ich für allgemein zugestanden annehmen zu dürfen.

Die Auflösung der Kugeldreiecke ist durch die der ebenen Dreiecke wesentlich bedingt. Beide schließen sich der Goniometrie, auf welcher sie beruhen, — die aber selbst noch nichts mit der Auflösung der Dreiecke zu thun hat, — in so vollständig gleicher Weise an, daß jeder Mangel an Übereinstimmung, der nicht durch die teilweise Verschiedenheit des Stoffes motiviert ist, als ein empfindlicher und schwer zu entschuldigender Fehler bezeichnet werden muß. Ich habe deshalb angelegentlich Sorge getragen, der Darstellung bis ins einzelste die erforderliche Einheit der Methode zu wahren, und ich hoffe, daß die Vergleichung beider Trigonometrien davon überzeugen wird. Nur durfte die aus den Neper'schen Analogieen folgende, dem Tangentialssatz entsprechende Proportion nicht in die Reihe der fundamentalen Sätze eintreten, da sie nicht, wie der analoge Satz der ebenen Trigonometrie, zur Auflösung der Dreiecke (aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel) benutzt werden kann.

An den einzelnen Stellen auf die zahlreichen Analogieen der ebenen und der sphärischen Trigonometrie aufmerksam zu machen, habe ich unterlassen, weil sie so augenfällig sind, daß es unmöglich scheint, ihrer nicht gewahr zu werden. Außerdem wird es für die Schüler eine gute Übung sein, sie sämtlich aufzusuchen, nicht nur in dem Buche selbst, sondern auch in den den Anhang bildenden Übungsaufgaben, deren Pendanten zwar zum Teil der Planimetrie angehören, aber eine trigonometrische Begründung zulassen. Der Nachweis der Notwendigkeit jener Analogieen liegt außerhalb der Grenzen des Elementar-Unterrichts.

Daß die Zuziehung des Polardreiecks den Schülern Schwierigkeiten bereitet, ist eine vielfach erhobene und gegründete Klage; ich habe mich deshalb ihrer enthalten und durchweg, wie in den andern Theilen des Lehrbuches, auf die unentbehrlichen Sätze und deren einfachste und naturgemäße Begründung beschränkt.

Bei solcher Darstellung wird die sphärische Trigonometrie den Schülern ebenso leicht faßlich und anziehend, als es meiner Erfahrung zufolge die ebene Trigonometrie jederzeit war, und somit jeder Grund wegfallen, dieselbe von dem Elementar-Unterrichte auszuschließen, in welchen sie, als die notwendige Ergänzung, sowohl der ebenen Trigonometrie, als der Stereometrie, unzweifelhaft gehört.

Dr. L. Kambly.

Inhalt.

Einleitung zur ebenen Trigonometrie. (§ 1 und 2)	Seite 1
Goniometrie.	
1. Erklärung der trigonometrischen Linien und Funktionen (zunächst spitzer Winkel). (§ 3 bis 5)	2
2. Abhängigkeit der trigonometrischen Funktionen eines Winkels von einander. (§ 6 und 7)	4
3. Änderung der trigonometrischen Funktionen durch Änderung des Winkels. Funktionen der Winkel über 90°. (§ 8 bis 11)	6
4. Funktionen zusammengesetzter Winkel. (§ 12 bis 18)	9
Ebene Trigonometrie.	
1. Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke. (§ 19 bis 21)	15
2. Auflösung der gleichschenkligen Dreiecke und der regulären Polygone. (§ 22)	17
3. Auflösung der schiefwinkligen ungleichseitigen Dreiecke. (§ 23 bis 28)	18
Anhang.	
1. Zusammenstellung der wichtigsten goniometrischen Formeln (1 bis 47)	26
2. Übungsaufgaben mit Andeutung ihrer Auflösung (48 bis 95)	28
3. Aufgaben ohne Lösung (96—130)	40
Sphärische Trigonometrie.	
Erklärung. (§ 1)	43
1. Die rechtwinkligen sphärischen Dreiecke. (§ 2 bis 9)	43
2. Die sphärischen Dreiecke im allgemeinen. (§ 10 bis 16)	48
3. Berechnung des Flächeninhaltes sphärischer Dreiecke. (§ 17)	56
Anhang.	
Übungsaufgaben	60

Einleitung zur ebenen Trigonometrie.

§ 1.

Die ebene Trigonometrie ist derjenige Teil der Planimetrie, welcher: aus irgend drei (in Zahlen gegebenen) ein Dreieck bestimmenden Stücken die übrigen durch Rechnung finden, das Dreieck auflösen lehrt.

Mit der Auflösung der Polygone, welche offenbar auf die der Dreiecke zurückgeht, beschäftigt sich die Polygonometrie. Diese ist also nur ein Teil der Trigonometrie.

§ 2.

Dieselbe Aufgabe löst die Planimetrie (im engeren Sinne) durch Konstruktion; zugleich zeigt sie, daß die Seiten und Winkel eines Dreiecks von einander abhängig sind, ohne jedoch (einige wenige Sätze ausgenommen) über die Art dieser Abhängigkeit einen näheren Aufschluß zu geben*). Die Messung der Winkel geschieht in der Planimetrie nur durch die Kreisbogen, auf welchen sie als Centriwinkel stehen. Es kommt also zunächst darauf an, die Winkel durch gerade Linien, oder vielmehr durch Verhältnisse gerader Linien zu bestimmen. Dies geschieht mittelst der trigonometrischen Linien und Funktionen (Winkelfunktionen, Kreisfunktionen) in der

*) Daß die Seiten eines Dreiecks den gegenüber liegenden Winkeln nicht proportioniert sind, läßt sich leicht darthun. Verhalten sich z. B. zwei Winkel eines Dreiecks wie 1 : 5, so müssen in dem um das Dreieck beschriebenen Kreise die zu jenen Winkeln gehörenden Bogen in demselben Verhältnisse stehen. Trägt man nun den kleineren Bogen auf dem größeren 5 mal ab und zieht die zu den einzelnen Teilen gehörenden Sehnen, so ist ihre Summe das Fünffache der dem kleineren Winkel gegenüber liegenden Dreiecksseite, die Gegenseite des größeren Winkels aber kleiner als dieses Fünffache.

Goniometrie.

1. Erklärung der trigonometrischen Linien und Funktionen (zunächst spitzer Winkel).

§ 3.

Fig. 1. **Erklärung.** Unter der Sinuslinie eines als Centriwinkel gezeichneten Winkels (ACB) versteht man die aus dem Endpunkte des einen Radius auf den andern gefällte Senkrechte (BD). Ihre Entfernung vom Mittelpunkt (DC) heißt die Cosinuslinie, ihre Entfernung von dem Endpunkte des Radius, auf den sie gefällt ist, (AD) heißt die Sinus-versus-Linie des Winkels.

Folgerung 1. Die Sinuslinie eines Centriwinkels ist die halbe Sehne des doppelt so großen Winkels*).

Denn verlängert man BD, bis sie die Peripherie in H trifft, so ist $BD = \frac{1}{2}BH$ und $\angle BCD = \frac{1}{2}BCH$.

Folgerung 2. Die Cosinuslinie eines spitzen Winkels ist die Sinuslinie seines Komplementwinkels (complementi sinus). Denn es ist $DC = BF$.

Fortsetzung der Erklärung. Unter der Tangentenlinie eines Centriwinkels versteht man die Senkrechte (AE) im Endpunkt des einen Radius bis zur Verlängerung des andern. Die Entfernung des Mittelpunktes von dem Endpunkte der Tangentenlinie (CE) heißt die Secantenlinie des Winkels.

Unter der Cotangentenlinie, Cosecantenlinie, Cosinus-versus-Linie eines spitzen Winkels versteht man resp. die Tangentenlinie, Secantenlinie, Sinus-versus-Linie seines Komplementwinkels.

*) Nach Gobin's Vermutung ist dies die eigentliche Bedeutung des Wortes sinus, welches durch Abfözung aus semissis inscriptae (s. ins., sins, sinus) entstanden sein soll. Wahrscheinlich aber ist sinus die irrige Übersetzung eines arabischen Wortes.

Es ist also $\left. \begin{array}{l} \text{MG die Cotangentenlinie} \\ \text{CG die Coscantenlinie} \\ \text{MF die Cosinus-versuß-Linie} \end{array} \right\} \text{ des } \angle \text{ACB};$

oder:

Cotangentenlinie von $\alpha = \text{Tangentenlinie von } (90^\circ - \alpha)$,
 Coscantenlinie von $\alpha = \text{Secantenlinie von } (90^\circ - \alpha)$,
 Cosinus-versuß-Linie von $\alpha = \text{Sinus-versuß-Linie von } (90^\circ - \alpha)$.

§ 4.

Erklärung. Bezieht man die trigonometrischen Linien in geometrischem Verhältnis auf den Radius (r), d. h. dividirt man sie durch denselben, so erhält man die gleichnamigen trigonometrischen Funktionen des Winkels (Sinus, Cosinus, Sinus versuß, Tangente u. s. w.)

$$\begin{aligned} \text{Demnach ist } \frac{BD}{r} &= \sin \alpha^*), & \frac{DC}{r} &= \cos \alpha, \\ \frac{AE}{r} &= \tan \alpha, & \frac{MG}{r} &= \cot \alpha, \\ \frac{EC}{r} &= \sec \alpha, & \frac{CG}{r} &= \text{cosec } \alpha, \end{aligned}$$

u. s. w.

Folgerung 1. Die trigonometrischen Funktionen sind unbenannte (abstrakte) Zahlen.

Folgerung 2. Die trigonometrischen Linien eines Winkels sind gleich den gleichnamigen Funktionen des Winkels, multipliciert mit dem Radius.

$$\begin{aligned} BD &= r \cdot \sin \alpha, & DC &= r \cdot \cos \alpha, \\ AE &= r \cdot \tan \alpha, & MG &= r \cdot \cot \alpha \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

oder: Sinuslinie von $\alpha = r \cdot \sin \alpha$,
 Cosinuslinie von $\alpha = r \cdot \cos \alpha$ u. s. w.

§ 5.

Lehrsatz. Die trigonometrischen Funktionen eines Winkels hängen nur von der Größe des Winkels, aber nicht von der Größe des Kreises ab, in welchen er als Centriwinkel eingezeichnet ist; d. h. sie sind für gleiche Winkel in irgend welchen Kreisen gleich.

Voraussetzung. $\angle ABC = abc$, aber die Kreise ungleich.

Fig. 1 u. 2.

Behauptung. $\sin ACB = \sin acb$,
 $\cos ACB = \cos acb$ u. s. w.

*) Auch von $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ u. s. w. gilt, was in der Arithmetik über $\log \alpha$ bemerkt wurde, daß nämlich α ein von dem Funktionszeichen abhängiger Genetiv, nicht etwa Nominativ oder gar als Faktor anzusehen ist.

Beweis. $\triangle BCD \sim bcd$, $\triangle ACE \sim ace$, $\triangle GMC \sim gmc$,
 folglich $\frac{BD}{BC} = \frac{bd}{bc}$, $\frac{DC}{BC} = \frac{dc}{bc}$, $\frac{AE}{AC} = \frac{ae}{ac}$, $\frac{CE}{AC} = \frac{ce}{ac}$ u. s. w.,
 d. i. $\sin ACB = \sin acb$, $\cos ACB = \cos acb$, u. s. w.

Für $\sin$. vers. und $\cos$. vers. ergibt sich die Richtigkeit des Satzes aus dem folgenden Paragraphen.

Anmerkung. Von dieser Eigenschaft haben die trigonometrischen Funktionen ihren Namen. Unter Funktion einer Größe versteht man nämlich jede 2te Größe, welche von der ersten so abhängt, daß eine Änderung dieser auch eine Änderung jener zur Folge hat. Nur von ihnen wird künftig die Rede sein.

2. Abhängigkeit der trigonometrischen Funktionen eines Winkels von einander.

§ 6.

Fig. 1. Lehrsätze. 1) Die Tangente eines Winkels ist gleich dem Sinus des Winkels, dividiert durch seinen Cosinus.

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ demnach } \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Denn es ist $\tan \alpha = \frac{AE}{AC}$ oder, weil $\triangle AEC \sim DBC$,

$$= \frac{DB}{DC} = \frac{r \cdot \sin \alpha}{r \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

2) Die Cotangente eines Winkels ist gleich dem Cosinus des Winkels, dividiert durch seinen Sinus. Sie ist also das Umgekehrte der Tangente.

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}, \text{ folglich auch } \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}.$$

Denn es ist $\cot \alpha = \frac{GM}{MC}$ oder, weil $\triangle GMC \sim CDB$,

$$= \frac{DC}{DB} = \frac{r \cdot \cos \alpha}{r \cdot \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

3) Die Secante eines Winkels ist das Umgekehrte seines Cosinus.

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \text{ folglich auch } \cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha}.$$

4) Die Cossecante eines Winkels ist das Umgekehrte seines Sinus.

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, \text{ also auch } \sin \alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha}.$$

Man beweist 3) und 4) ebenso wie 1) und 2); indem man nämlich die entsprechende Funktionslinie durch denjenigen Radius dividiert, der

mit ihr in einem Dreieck vorkommt, und auf das ähnliche Dreieck BDC zurückgeht.

5) Der Sinus versuß eines Winkels ist gleich eins, weniger dem Cosinus des Winkels.

$$\sin. \text{ vers. } \alpha = \frac{AD}{r} = \frac{AC - DC}{r} = \frac{r - r \cdot \cos \alpha}{r} = 1 - \cos \alpha.$$

6) Der Cosinus versuß eines Winkels ist gleich eins, weniger dem Sinus des Winkels.

$\cos. \text{ vers. } \alpha = 1 - \sin \alpha$, weil $MF = CM - CF$ ist.

7) Die Summe aus dem Quadrat des Sinus eines Winkels und dem Quadrat seines Cosinus ist gleich eins.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Denn es ist $\sin^2 \alpha = \frac{BD^2}{r^2}$ und $\cos^2 \alpha = \frac{DC^2}{r^2}$, also

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{BD^2}{r^2} + \frac{DC^2}{r^2} = \frac{BD^2 + DC^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.$$

Folgerung 1. $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ und $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

Folgerung 2. $\sec \alpha = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$ und $\operatorname{cosec} \alpha = \sqrt{1 + \cot^2 \alpha}$.

Dies ergibt sich, wenn man $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ entweder durch $\cos^2 \alpha$ oder durch $\sin^2 \alpha$ dividiert, die erhaltenen Brüche mittelst der in 1) bis 4) enthaltenen Bestimmungen beseitigt und die Quadratwurzel auszieht.

§ 7.

Aus den Relationen des vorigen Paragraphen folgt, daß, wenn eine Funktion eines Winkels bekannt ist, auch die übrigen es sind.

Ist z. B. $\sin x = \frac{3}{5}$, so ist $\cos. \text{ vers. } x = \frac{2}{5}$, $\operatorname{cosec} x = \frac{5}{3}$, ferner $\cos x = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$, $\sin. \text{ vers. } x = \frac{1}{5}$, $\sec x = \frac{5}{4}$, endlich $\tan x = \frac{3}{4}$ und $\cot x = \frac{4}{3}$.

Oder: Ist $\tan y = \frac{15}{8}$, so ist $\cot y = \frac{8}{15}$,

ferner $\sec y = \sqrt{1 + \frac{64}{225}} = \frac{17}{15}$, $\cos y = \frac{15}{17}$, $\sin. \text{ vers. } y = \frac{2}{17}$, endlich $\sin y = \frac{8}{17}$, $\frac{15}{17} = \frac{8}{17}$, $\operatorname{cosec} y = \frac{17}{8}$, $\cos. \text{ vers. } y = \frac{9}{17}$.

Nach § 3, Folg. 1 kennt man die Sinuslinien (demnach auch die Sinus) derjenigen Winkel, welche doppelt genommen gleich dem Centriwinkel des regulären Sechsecks, Dreiecks, Viersecks u. s. w. werden. (S. „Planimetrie“ § 153—155.)

Es ist nämlich $\sin 30^\circ = \frac{\frac{1}{2} \text{ Sehne von } 60^\circ}{r} = \frac{\frac{1}{2} S_6}{r} = \frac{\frac{1}{2} r}{r} = \frac{1}{2}$,

demnach $\cos 30^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3}$, $\tan 30^\circ = \frac{1}{3} \sqrt{3}$,

$\cot 30^\circ = \sqrt{3}$, $\sec 30^\circ = \frac{2}{3} \sqrt{3}$,

$\operatorname{cosec} 30^\circ = 2$ u. s. w.

$$\text{Ebenso ist } \sin 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}\text{Sehne von } 120^\circ}{r} = \frac{\frac{1}{2}S_3}{r} = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

also, wie auch aus § 3 extr. folgt, $= \cos 30^\circ$;
mithin $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ u. f. w.

$$\text{Ferner ist } \sin 45^\circ = \frac{\frac{1}{2}S_4}{r} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \text{ desgl. auch } \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

also $\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$, $\sec 45^\circ = \operatorname{cosec} 45^\circ = \sqrt{2}$, u. f. w.

$$\text{Endlich } \sin 18^\circ \text{ oder } \cos 72^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) \text{ u. f. w.}$$

$$\sin 15^\circ \text{ oder } \cos 75^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{3} \text{ u. f. w.}$$

3. Änderung der trigonometrischen Funktionen durch Änderung des Winkels.

Funktionen der Winkel über 90° .

§ 8.

Fig. 3. Denkt man sich den einen Schenkel AC eines sehr kleinen Centriwinkels unbeweglich, den andern BC sich von ihm ab bewegend, so daß der Winkel bis 90° wächst: so ergiebt sich aus der Betrachtung der trigonometrischen Linien, daß Sinus, Tangente, Secante und Sinus versüs wachsen, Cosinus, Cotangente, Coscane und Cosinus versüs abnehmen.

Man pflegt dies kurz so auszudrücken:

Die Funktionen (im engeren Sinne) nehmen zu, die Cosunctionen nehmen ab.

Ferner ist

$$\sin 0^\circ = 0 \text{ und } \sin 90^\circ = \frac{r}{r} = 1,$$

$$\cos 0^\circ = \frac{r}{r} = 1, \cos 90^\circ = 0. \text{ (In Übereinstimmung mit § 3 extr.)}$$

$$\left. \begin{array}{ll} \tan 0^\circ = 0, & \tan 90^\circ = \infty, \\ \cot 0^\circ = \infty, & \cot 90^\circ = 0, \\ \sec 0^\circ = 1, & \sec 90^\circ = \infty, \\ \operatorname{cosec} 0^\circ = \infty, & \operatorname{cosec} 90^\circ = 1. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Dies folgt auch aus § 6, 1) bis} \\ \text{7), da } \varphi = 0 \text{ und } \frac{1}{\varphi} = \infty, \text{ und} \\ \sqrt{1+0} = 1, \sqrt{1+\infty^2} = \infty. \end{array}$$

Wenn also ein Winkel von 0° bis 90° wächst,

so nimmt sein Sinus zu von 0 bis 1,
sein Cosinus ab von 1 bis 0,
seine Tangente zu von 0 bis ∞ ,
seine Cotangente ab von ∞ bis 0,
seine Secante zu von 1 bis ∞ ,
seine Coscane ab von ∞ bis 1.

Ähnliche Veränderungen erleiden auch Sinus versüs und Cosinus versüs, die aber, als unwichtigere Funktionen, fortan keine weitere Beachtung finden sollen.

§ 9.

Wächst der Winkel noch weiter, tritt also der bewegliche Schenkel BC in den 2ten, 3ten u. s. w. der von AQ und MN gebildeten Quadranten: so können die Definitionen von Sinuslinie^{*)}, Cosinuslinie, Tangentenlinie, Secantenlinie und Sinus-versus-Linie offenbar noch unverändert beibehalten werden; die übrigen aber geben nur dann noch einen Sinn, wenn man den Begriff Komplementwinkel erweitert und entweder unter ihm auch, je nach Bedürfnis, die Ergänzung zu $5R$, $9R$ u. s. w. versteht, oder negative Komplementwinkel zuläßt. Will man dies nicht, so muß man jene Definitionen modificieren.

Es ist jedoch weit zweckmäßiger, die geometrische Darstellung überhaupt möglichst zu verlassen und die aus den Fundamentalbegriffen unmittelbar hervorgehenden Relationen (§ 6, 1 bis 4) als neue Definitionsbestimmungen aufzufassen.

Ich werde sie also der weiteren Betrachtung als neue Ausgangspunkte zu grunde legen und von nun an unter $\tan \alpha$, $\cot \alpha$, $\sec \alpha$, $\operatorname{cosec} \alpha$ nichts weiter verstehen als resp. die Quotienten:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Hiernach ist ersichtlich, daß, wenn der Winkel von 90° bis 180° wächst, also ein Winkel im 2ten Quadranten ist, die Funktionen ab-, und die Cosfunktionen zunehmen; daß im dritten Quadranten, d. h. für Winkel von 180° bis 270° , dieselben Änderungen wie im 1ten, und im 4ten wie im 2ten eintreten.

Die Grenzen, innerhalb deren sich die Funktionen bewegen, bleiben dieselben, nämlich

- für Sinus und Cosinus 0 und 1,
- für Tangente und Cotangente 0 und ∞ ,
- für Secante und Cosecante 1 und ∞ .

§ 10.

Da die Grenzen der trigonometrischen Funktionen für die verschiedenen Quadranten dieselben bleiben, so müssen innerhalb derselben auch dieselben Werte wiederkehren. Es kann also der zu einem gegebenen Sinus, Cosinus u. s. w. gehörige Winkel beliebig ein Winkel im 1ten, 2ten, 3ten u. s. w. Quadranten (z. B. $\angle \alpha$, $180^\circ - \alpha$, $180^\circ + \alpha$, $360^\circ - \alpha \dots$) sein.

Die Unbestimmtheit der Winkel durch ihre Funktionen ist aber nicht so groß, als sie zunächst scheint, weil die zu solchen Winkeln gehörenden trigonometrischen Linien sich hinsichtlich der Lage unterscheiden.

^{*)} Nur die Erklärung der Sinuslinie ist in der Art zu erweitern, daß man zu den Worten: „auf den andern Radius“ hinzufügt: „oder dessen Verlängerung“.

Bezieht man nämlich die Sinuslinien auf den horizontalen Durchmesser AQ, von welchem aus sie aufwärts und abwärts liegen können, und die Lage der Cosinuslinien auf den vertikalen Durchmesser MN, von welchem aus sie nach links und nach rechts gewendet sein können, und nennt man ihre Lage im 1ten Quadranten die positive, die entgegengesetzte die negative: so ergibt sich,

daß die Sinus im ersten und zweiten Quadranten positiv, im dritten und vierten negativ,

die Cosinus im ersten und vierten positiv, im zweiten und dritten negativ sind.

Demgemäß müssen Tangente und Cotangente im ersten und dritten positiv, im zweiten und vierten negativ sein, weil gleichstimmige Größen einen positiven, entgegengesetzte Größen einen negativen Quotienten ergeben.

Das Vorzeichen der Secante richtet sich nach dem Cosinus, das der Cosecante nach dem Sinus.

Sinus und Cosinus liegen also zwischen $+1$ und -1 , Tangente und Cotangente zwischen $+\infty$ und $-\infty$, Secante und Cosecante zwischen $+\infty$ und $+1$, und zwischen -1 und $-\infty$. Es ist nämlich
 $\sin 0^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = +1$, $\sin 180^\circ = \pm 0$, $\sin 270^\circ = -1$, $\sin 360^\circ = \mp 0$,
 $\cos 0^\circ = +1$, $\cos 90^\circ = \pm 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\cos 270^\circ = \mp 0$, $\cos 360^\circ = +1$,
 $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$, $\operatorname{tg} 90^\circ = \pm \infty$, $\operatorname{tg} 180^\circ = \mp 0$, $\operatorname{tg} 270^\circ = \pm \infty$, $\operatorname{tg} 360^\circ = \mp 0$,
 $\cot 0^\circ = \infty$, $\cot 90^\circ = \pm 0$, $\cot 180^\circ = \mp \infty$, $\cot 270^\circ = \pm 0$, $\cot 360^\circ = \mp \infty$,
 $\sec 0^\circ = +1$, $\sec 90^\circ = \pm \infty$, $\sec 180^\circ = -1$, $\sec 270^\circ = \mp \infty$, $\sec 360^\circ = +1$,
 $\csc 0^\circ = \infty$, $\csc 90^\circ = +1$, $\csc 180^\circ = \pm \infty$, $\csc 270^\circ = -1$, $\csc 360^\circ = \mp \infty$.

Der Zeichenwechsel tritt nur bei 0 und ∞ , nie bei 1 ein.

§ 11.

Lehrsatz. Alle trigonometrischen Funktionen eines stumpfen Winkels (mit Ausnahme des Sinus versüs) sind ihrem Zahlenwerte nach gleich den gleichnamigen Funktionen des Supplementwinkels. Die Sinus und Cosecanten (und Cosinus versüs) der Supplementwinkel sind einander vollständig gleich.

Vorausgesetzt, daß $\angle x$ ein stumpfer ist, so wird behauptet:

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin (180^\circ - x), \\ \operatorname{cosec} x &= \operatorname{cosec} (180^\circ - x), \\ \cos x &= -\cos (180^\circ - x), \\ \operatorname{tang} x &= -\operatorname{tang} (180^\circ - x) \text{ u. s. w.}\end{aligned}$$

Denn in Fig. 3 gehört KL als Sinuslinie, CL als Cosinuslinie, eben sowohl zu $\angle ACK$, als zu $\angle KCQ$. Der Gegensatz der Lage tritt an der Cosinuslinie hier aus dem Grunde nicht hervor, weil der spitze $\angle KCQ$ nicht als Winkel im ersten Quadranten gezeichnet ist.

Für die übrigen Funktionen erhellt die Richtigkeit des Satzes aus den Grundformeln in § 6, 1 bis 4.

Anmerkung. In betreff der Complementwinkel ist nochmals daran zu erinnern, daß die Function des einen gleich der gleichnamigen Cofunction des andern ist (s. § 3 extr.).

4. Funktionen zusammengesetzter Winkel.

§ 12.

Lehrsatz. Der Sinus der Summe zweier Winkel ist gleich der Summe zweier Produkte je aus dem Sinus des einen in den Cosinus des andern Winkels.

Behauptung. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha.$ (I)
Fig. 4

Beweis. Zeichnet man die Sinuslinien der beiden anstoßenden Centriwinkel α und β und die Sinuslinie ihrer Summe ACD, nämlich BE, DF und DG, und zieht FH $\parallel$ BE und FK $\parallel$ AC: so ist

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{DG}{r} = \frac{FH + DK}{r}.$$

FH liegt in dem Dreieck FHC, welches $\sim$ BEC ist; folglich verhält sich FH : BE = FC : BC,

$$\text{und es ist } FH = \frac{BE \cdot FC}{BC} = \frac{r \cdot \sin \alpha \cdot r \cdot \cos \beta}{r} = r \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta.$$

DK liegt in dem Dreieck DKF, welches ebenfalls $\sim$ BEC ist; folglich ist DK : DF = EC : BC

$$\text{und } DK = \frac{DF \cdot EC}{BC} = \frac{r \cdot \sin \beta \cdot r \cdot \cos \alpha}{r} = r \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha.$$

Trägt man nun die Werte von FH und DK in der ersten Gleichung ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \frac{r \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta + r \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha}{r} \\ &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Anmerkung. Der Beweis bleibt vollständig derselbe, wenn $\angle \alpha$ und β zusammen einen stumpfen Winkel betragen. Ist $\angle \alpha$ oder β selbst stumpf und $\alpha + \beta$ noch ein Winkel im zweiten Quadranten, so stellt sich die Sinuslinie von $\alpha + \beta$ zunächst als eine Differenz dar, die aber in die verlangte Summe übergeht, da der Cosinus des stumpfen Winkels negativ ist.

Größere Winkel können in der elementaren Trigonometrie füglich unberücksichtigt bleiben.

Lehrsatz 2. Der Cosinus der Summe zweier Winkel ist gleich dem Produkte der Cosinus, vermindert um das der Sinus.

Behauptung. $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta.$ (II)

Der Beweis ist dem vorigen analog und unterscheidet sich von ihm nur dadurch, daß man die Cosinuslinie von $\alpha + \beta$ als eine Differenz (HC — FK) darzustellen und folglich in den zu betrachtenden

Dreiecken die andern Katheten mit den Hypotenusen zu proportionieren hat*).

Bei stumpfen Winkeln erleidet der Beweis ähnliche Abänderungen, wie der vorige.

§ 13.

Setzt man in den Gleichungen (I) und (II) $\angle \alpha = \beta$, so erhält man die Formeln:

$$1) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

also, wenn $2\alpha = \varphi$ und demnach $\alpha = \frac{\varphi}{2}$ angenommen wird,

$$\sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Anmerkung. Der Sinus des doppelten Winkels ist also nicht gleich dem doppelten Sinus des einfachen Winkels. Nur wenn der Winkel sehr klein, sein Cosinus also nahe $= 1$ ist, gehört zum doppelten (resp. halben) Winkel beinahe ein doppelt (resp. halb) so großer Sinus.

$$\begin{aligned} 2) \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \text{ oder} \\ &= 1 - 2 \sin^2 \alpha, \text{ oder} \\ &= 2 \cos^2 \alpha - 1, \end{aligned}$$

je nachdem man $\cos^2 \alpha$ oder $\sin^2 \alpha$ mittelst § 6, 7) eliminiert.

Es ist also auch $\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ oder

$$= 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1, \text{ und folglich}$$

$$\begin{aligned} 3) \sin \frac{\varphi}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}}, \\ \cos \frac{\varphi}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}}. \end{aligned}$$

Setzt man in den Gleichungen (I) und (II) $\angle \beta = 2\alpha$ und substituirt den Funktionen von 2α ihre so eben gefundenen Werte, entfernt alsdann in Gleichung (I) das sich ergebende $\cos^2 \alpha$, in Gleichung (II) das sich ergebende $\sin^2 \alpha$ mit Hilfe von § 6, 7): so erhält man Ausdrücke

*) Da der Sinus eines Peripheriewinkels gleich der Hälfte der zugehörigen Sehne, dividiert durch den Radius, oder gleich der ganzen Sehne, dividiert durch den Durchmesser — der Cosinus eines Peripheriewinkels gleich der Sehne des Supplementbogens (der Ergänzung zur halben Peripherie), dividiert durch den Durchmesser, ist: so kann man beide Sätze leicht aus dem Ptolemäischen Satze („Planimetrie“ Übungs-Aufgaben 54) ableiten; indem man nämlich zwei anstoßende Peripheriewinkel zeichnet, deren gemeinschaftlicher Schenkel ein Durchmesser ist, und zum Beweis des ersten Satzes die freien Punkte verbindet, zum Beweis des zweiten aber die Sehne des Supplementbogens zieht und ihre Endpunkte mit den Endpunkten des Durchmessers verbindet.

für den Sinus und den Cosinus des dreifachen Winkels resp. durch den Sinus und den Cosinus des einfachen, nämlich

$$\begin{aligned} 4) \sin 3\alpha &= 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha \text{ und} \\ \cos 3\alpha &= 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha. \end{aligned}$$

§ 14.

Lehrsatz. 1) Der Sinus der Differenz zweier Winkel ist gleich der Differenz derselben Produkte, deren Summe den Sinus der Summe bildet.

2) Der Cosinus der Differenz ist gleich der Summe der beiden Produkte, deren Differenz den Cosinus der Summe bildet.

Behauptung. 1) $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$.

2) $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$.

Beweis. Trägt man $\angle \beta$ nicht, wie in Fig. 4, an $\angle \alpha$ an, Fig. 5, sondern von BC aus in $\angle \alpha$ hinein, zeichnet alsdann die Sinuslinien von α , β und $\alpha - \beta$, nämlich BE, DF und DG: so ist die weitere Konstruktion und der Beweis, abgesehen von den Vorzeichen, wörtlich und buchstäblich so, wie für die beiden Lehrsätze in § 12*).

Anmerkung 1. Daß der Satz auch für stumpfe Winkel richtig ist, läßt sich aus den entsprechenden Figuren leicht nachweisen, wenn man nur die Vorzeichen der Cosinus gehörig beachtet.

Anmerkung 2. Auch auf analytischem Wege ergibt sich der Satz; wenn man nämlich in den Formeln (I) und (II) $\angle \alpha + \beta = \gamma$, also $\angle \alpha = \gamma - \beta$ setzt und die resultierenden Gleichungen in Beziehung auf $\sin(\gamma - \beta)$ und $\cos(\gamma - \beta)$, am besten mittelst des Algorithmus, auflöst.

Folgerung. $\sin(0^\circ - x)$ d. i. $\sin(-x) = -\sin x$

und $\cos(0^\circ - x)$ d. i. $\cos(-x) = +\cos x$;

demnach $\tan(-x) = -\tan x$,

$\cot(-x) = -\cot x$ u. s. w.

Als negativ ist z. B. $\angle BCD$ in voriger Figur anzusehen, weil seine Lage der ursprünglich angenommenen offenbar entgegengesetzt ist.

§ 15.

Durch Addition und Subtraktion der Formeln für $\sin(\alpha + \beta)$ und $\sin(\alpha - \beta)$ erhält man:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin \alpha \cdot \cos \beta \text{ und}$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\sin \beta \cdot \cos \alpha.$$

*) Auch bei Anwendung des Ptolemäischen Satzes unterscheidet sich die betreffende Figur von der in § 12 beschriebenen nur dadurch, daß man den kleineren Peripheriewinkel von dem Durchmesser aus in den größeren hineinzeichnet.

Auf dieselbe Weise folgt aus $\cos(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha - \beta)$
 $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta$ und
 $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta$.

Setzt man in diesen vier Gleichungen

$$\angle \alpha + \beta = m \text{ und } \angle \alpha - \beta = n,$$

$$\text{demnach } \angle \alpha = \frac{m+n}{2} \text{ und } \angle \beta = \frac{m-n}{2},$$

so gehen sie über in :

$$\sin m + \sin n = 2 \sin \frac{m+n}{2} \cdot \cos \frac{m-n}{2},$$

$$\sin m - \sin n = 2 \sin \frac{m-n}{2} \cdot \cos \frac{m+n}{2},$$

$$\cos m + \cos n = 2 \cos \frac{m+n}{2} \cdot \cos \frac{m-n}{2} \text{ und}$$

$$\cos n - \cos m = 2 \sin \frac{m+n}{2} \cdot \sin \frac{m-n}{2}.$$

§ 16.

Lehrsatz. Die Tangente der Summe zweier Winkel ist gleich der Summe der Tangenten beider Winkel, dividirt durch die Differenz von eins und dem Produkte dieser beiden Tangenten.

$$(III) \text{ Behauptung. } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}.$$

$$\text{Beweis. Nach § 6, 1 ist } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

Trägt man nun für $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ ihre Werte ein und dividirt Zähler und Nenner des Bruches durch $\cos \alpha \cdot \cos \beta$, so ergibt sich die Behauptung.

Auf dieselbe Weise erhält man aus $\sin(\alpha - \beta)$ und $\cos(\alpha - \beta)$ den

$$\text{Zusatz. } \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}. \text{ In Worten?}$$

Setzt man in Gleichung (III) $\dots \angle \alpha = \beta$, so hat man die

$$\text{Folgerung. } \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha},$$

$$\text{demnach } \tan \varphi = \frac{2 \tan \frac{1}{2} \varphi}{1 - \tan^2 \frac{1}{2} \varphi}.$$

Anmerkung. Auch die übrigen Funktionen des ganzen Winkels φ geben, durch $\tan \frac{\varphi}{2}$ ausgedrückt, rationale Formeln. Es ist nämlich nach § 6 extr.

$$\sec \varphi = \frac{1 + \tan^2 \frac{1}{2} \varphi}{1 - \tan^2 \frac{1}{2} \varphi},$$

$$\sin \varphi = \frac{2 \tan \frac{1}{2} \varphi}{1 + \tan^2 \frac{1}{2} \varphi} \text{ u. f. w.}$$

Das Umgekehrte findet nicht statt; $\tan \frac{\varphi}{2}$ drückt man am besten durch $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ aus, wie folgt;

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi}{\cos \frac{1}{2} \varphi} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \varphi)}}{\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \varphi)}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}}$$

oder, wenn man Zähler und Nenner des Bruches mit dem Zähler oder mit dem Nenner multipliciert und die Wurzeln zieht,

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \text{ oder } = \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi}.$$

$$\text{Wie gelangt man zu } \tan 3\varphi = \frac{3 \tan \varphi - \tan^3 \varphi}{1 - 3 \tan^2 \varphi}?$$

§ 17.

Geht man von $\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin(\alpha \pm \beta)}$ aus und dividirt Zähler und Nenner durch $\sin \alpha \cdot \sin \beta$, so erhält man

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}, \text{ demnach}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha} \text{ oder}$$

$$= \frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{2}.$$

$$\text{Daß } \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \text{ oder } = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \text{ ist, folgt aus}$$

$$\S 16 \text{ extr. — Endlich ist } \cot 3\alpha = \frac{\cot^3 \alpha - 3 \cot \alpha}{3 \cot^2 \alpha - 1}.$$

§ 18.

Durch wiederholte Anwendung der entwickelten Formeln auf die in § 7 angegebenen Winkel überzeugt man sich leicht von der Möglichkeit, die trigonometrischen Funktionen aller Winkel zu berechnen, wenn man zugleich beachtet, daß sehr kleine Winkel sich ziemlich genau wie ihre Sinus (§ 13, Anmerkung u. Schluß) oder wie ihre Tangenten (§ 16, Folgerung u. Schluß) verhalten. Doch bietet die höhere Analysis weit einfachere Mittel, deren man sich auch zur Entwerfung der trigonometrischen Tafeln bedient hat.

In Beziehung auf diese sei hier nur folgendes bemerkt:

1) Die meisten derselben sind logarithmisch-trigonometri-

ſche; d. h. ſie enthalten nicht die trigonometriſchen Funktionen ſelbſt, ſondern ihre Logarithmen.

2) Sie enthalten nur die Logarithmen der Sinus, Coſinus, Tangenten und Cotangenten, weil dieſe Funktionen am meiſten in Anwendung kommen, und die Logarithmen der Secanten und Coſecanten gleich den negativ genommenen Logarithmen der Coſinus und der Sinus ſind.

3) Die Logarithmen der Funktionen ſind nur für ſpizige Winkel angegeben; erſtens deſhalb, weil ja die Funktionen der ſtumpfen Winkel mit Ausnahme von Sinus (und Coſecante) negative Zahlen, ihre Logarithmen alſo imaginär ſind, und zweitens, weil man die Funktionen ſtumpfer Winkel durch die ihrer Supplementwinkel erſetzen kann und immer erſetzen muß, ſobald man trigonometriſche Ausdrücke durch Logarithmen berechnen will.

4) Da die Sinus und Coſinus aller Winkel, ferner die Tangenten der Winkel unter 45° und die Cotangenten ihrer Komplementwinkel echte Brüche ſind, ihre Logarithmen alſo negative Kennziffern haben: ſo iſt in den Taſeln, um dieſe negativen Kennziffern zu beſeitigen, zu allen *) Logarithmen die Zahl 10 addiert.

Man hat alſo von jedem aus den Taſeln entnommenen (um 10 vergrößerten) Logarithmus einer Funktion die Zahl 10 zu ſubtrahieren, oder ihm als ſubtraktive Größe hinzuzufügen,

$$\begin{aligned} \text{z. B. } \log \sin 23^\circ \text{ iſt nicht} &= 9,5918780, \\ \text{ſondern} &= 9,5918780 - 10 \text{ oder } 0,5918780 - 1. \end{aligned}$$

Andererſeits muß man zu jedem ſolchen Logarithmus einer Funktion, wenn man den zugehörigen Winkel (Bogen, arcus) in den Taſeln auffuchen will, erſt 10 addieren.

Hat man z. B. $\log \cos x = 0,9133645 - 1$, ſo ſchreibe man dafür 9,9133645. Man findet alſdann $\angle x = 35^\circ$.

5) Die Interpolation der trigonometriſchen Taſeln, d. h. die Berechnung von Winkeln und Logarithmen der Funktionen, welche zwiſchen den in den Taſeln angegebenen liegen, beruht darauf, daß: wenn ein Winkel α um kleine Unterſchiede zunimmt, $\log \sin \alpha$ und $\log \tan \alpha$ um proportionierte Unterſchiede wachſen, dagegen $\log \cos \alpha$ und $\log \cot \alpha$ um eben ſolche Unterſchiede abnehmen.

*) In neueren Tabellen ſind die $\log \tan$ und $\cot$, welche > 0 , unverändert geſaſſen.

Ebene Trigonometrie.

1. Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke.

§ 19.

Bezeichnet man die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, wie Fig. 6 üblich, mit a und b , die Hypotenuse mit c , und die Gegenwinkel der Seiten durch die entsprechenden großen Buchstaben, so ergibt sich nach § 4, Erklär., wenn man sich mit der Hypotenuse aus einem ihrer Endpunkte einen Kreis beschrieben denkt,

$$1) \sin A = \frac{a}{c} \text{ und } \sin B = \frac{b}{c},$$

$$2) \cos A = \frac{b}{c} \text{ und } \cos B = \frac{a}{c}, \text{ folglich nach § 6}$$

$$3) \tan A = \frac{a}{b} \text{ und } \tan B = \frac{b}{a},$$

$$4) \cot A = \frac{b^*)}{a} \text{ und } \cot B = \frac{a}{b}; \text{ demnach}$$

$$5) a = c \cdot \sin A \text{ oder } = c \cdot \cos B,$$

$$6) a = b \cdot \tan A \text{ oder } = b \cdot \cot B,$$

$$7) c = \frac{a}{\sin A} \text{ oder } = \frac{a}{\cos B}.$$

In Worten:

Im rechtwinkligen Dreieck ist

der Sinus eines spitzen Winkels gleich der gegenüber liegenden Kathete, dividirt durch die Hypotenuse,
der Cosinus eines spitzen Winkels gleich der anliegenden Kathete, dividirt durch die Hypotenuse,

*) Die Formeln für die Secante und Cossecante, nämlich $\sec A = \frac{c}{b}$ und $\operatorname{cosec} A = \frac{c}{a}$, sind für die Auflösung der Dreiecke ohne Wichtigkeit, da die trigonometrischen Tafeln die $\log \sec$ und $\log \operatorname{cosec}$ nicht enthalten.

die Tangente eines spitzen Winkels gleich der gegenüber liegenden Kathete, dividirt durch die anliegende, die Cotangente eines spitzen Winkels gleich der anliegenden Kathete, dividirt durch die gegenüber liegende; ferner jede Kathete gleich der Hypotenuse, multiplicirt mit dem Sinus des der Kathete gegenüber liegenden oder dem Cosinus des ihr anliegenden spitzen Winkels, jede Kathete gleich der andern Kathete, multiplicirt mit der Tangente des der ersten gegenüber oder der Cotangente des ihr anliegenden spitzen Winkels, und die Hypotenuse gleich jeder Kathete, dividirt durch den Sinus des der Kathete gegenüber oder durch den Cosinus des ihr anliegenden spitzen Winkels.

§ 20.

Auf diesen Formeln beruht die Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke, wenn entweder zwei Seiten,
oder eine Seite und ein spitzer Winkel gegeben sind.

Bei ihrer Anwendung ist zu beachten: daß man Tangente oder Cotangente nehmen muß, wenn unter den drei Stücken, welche in jedem einzelnen Falle in betracht kommen (2 gegeben und 1 gesucht) sich die Hypotenuse nicht befindet, dagegen den Sinus oder den Cosinus, wenn die Hypotenuse darunter ist, und die beiden andern Stücke einander gegenüber, oder an einander anliegen. Ferner ist daran zu erinnern, daß man aus dem einen spitzen Winkel durch Subtraktion von 90° den andern findet, und daß aus zwei Seiten die dritte mittelst des Pythagoreischen Satzes sich ergibt.

Beispiel 1. Es sei die Kathete $a = 78$ m, $\angle A = 62^\circ 9' 41''$; so ist $\angle B = 27^\circ 50' 19''$,

$$c = \frac{78 \text{ m}}{\sin 62^\circ 9' 41''}, \text{ also } \log c = \log 78 - \log \sin 62^\circ 9' 41'',$$

$$= 11.8920946$$

$$- 9.9465832$$

$$= 1.9455114$$

(wenn man statt vom Subtrahendus 10 zu subtrahieren, zum Minuendus 10 addiert) folglich $c = 88,2087$ m.

Endlich ist $b = 78 \text{ m} \cdot \cot 62^\circ 9' 41''$, also

$$\log b = \log 78 + \log \cot 62^\circ 9' 41''$$

$$= 1.8920946$$

$$+ 9.7227175$$

$$= 1.6148121 \text{ (nach Subtraktion von 10)},$$

mithin $b = 41,19195$ m.

Beispiel 2. Es sei $a = 4\text{ m}$, $b = 27\text{ dm}$; so ist
 $\text{tang } A = \frac{40}{27}$, $\log \text{tang } A = \log 40 - \log 27 = 10,1706962$,
 folglich $\angle A = 55^\circ 58' 50,3''$, $\angle B = 34^\circ 1' 9,7''$ und $c =$
 $\frac{40\text{ dm}}{\sin A} = 48,25972\text{ dm}$.

§ 21.

Aufgabe 1. Aus dem Flächeninhalt F des rechtwinkligen Dreiecks und dem spitzen Winkel A eine Kathete zu berechnen.

Auflösung. Man trage in der Gleichung $F = \frac{ab}{2}$ für b den Wert
 $a \cdot \cot A$ ein; so erhält man $F = \frac{a^2 \cdot \cot A}{2}$,

$$\text{demnach } a = \sqrt{2F \cdot \text{tang } A}, \text{ ebenso} \\ b = \sqrt{2F \cdot \cot A} \text{ oder } \sqrt{2F \cdot \text{tang } B}.$$

Aufgabe 2. Die Hypotenuse durch F und $\angle A$ auszudrücken.

Auflösung. Man trage in $F = \frac{ab}{2}$ für a und b ihre Werte
 $c \cdot \sin A$ und $c \cdot \cos A$ ein; so ergibt sich

$$F = \frac{c^2 \cdot \sin A \cdot \cos A}{2} \text{ oder nach § 13, 1}$$

$$F = \frac{c^2 \cdot \sin 2A}{4}, \text{ desgl. auch } \frac{c^2 \cdot \sin 2B}{4}, \text{ da...?}$$

$$\text{folglich } c = \sqrt{\frac{4F}{\sin 2A}}, \text{ desgl. auch } = \sqrt{\frac{4F}{\sin 2B}}.$$

Anmerkung 1. Bei der logarithmischen Berechnung der Werte für a ,
 b und c hat man die Zahl 10 vor der Division durch 2 abzugeben.

Anmerkung 2. Natürlich kann man die Formeln $F = \frac{a^2 \cdot \cot A}{2}$ und
 $\left(\frac{c}{2}\right)^2 \cdot \sin 2A$ auch zur Berechnung des Flächeninhalts aus einer Seite
 und einem spitzen Winkel und zur Berechnung eines Winkels aus dem
 Flächeninhalt und einer Seite anwenden.

2. Auflösung der gleichschenkligen Dreiecke und der regulären Polygone.

§ 22.

1) Die Auflösung der gleichschenkligen Dreiecke geht unmittel-
 bar auf die der rechtwinkligen zurück, da die Senkrechte aus der
 Spitze sowohl die Basis als den Winkel an der Spitze halbiert.

Man hat also, um auf das rechtwinklige Dreieck zu kommen, die

Basis, ebenso den Winkel an der Spitze, wenn sie gegeben sind, zu halbieren, und wenn sie gesucht werden, erst ihre Hälften zu berechnen.

Für den Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks ergeben sich, wenn man die Basis mit b , die Schenkel mit a , und die Gegenwinkel entsprechend mit B und A bezeichnet, aus

$$F = \frac{b}{2} \cdot h \text{ die Gleichungen}$$

$$F = \frac{b^2}{4} \cdot \cot \frac{B}{2} \text{ oder } = \left(\frac{b}{2} \right)^2 \cot \frac{B}{2},$$

$$F = \frac{a^2 \cdot \sin B}{2} \text{ und } F = h^2 \tan \frac{B}{2}.$$

Man erhält diese Formeln auch aus denen in § 21, wenn man letztere mit 2 multipliziert und die Bezeichnungen ändert.

2) Mit der Auflösung der gleichschenkligen Dreiecke ist auch die Lösung der regulären Polygone vollzogen, da ja ihre Bestimmungsdreiecke gleichschenklige sind.

Zu ihrer Auflösung braucht, außer dem Centriwinkel, welcher zugleich mit der Seitenanzahl gegeben ist ($\epsilon_n = \frac{360^\circ}{n}$), nur eine Bestimmung bekannt zu sein, nämlich

- entweder eine Seite des Polygons (oder sein Umring),
- oder der Radius r des umschriebenen Kreises (oder d, P, F),
- oder der Radius ρ des eingeschriebenen Kreises (oder eine von ihm abhängige Bestimmung),
- oder der Flächeninhalt des Polygons, demnach auch der des Bestimmungsdreiecks.

3. Auflösung der schiefwinkligen ungleichseitigen Dreiecke.

§ 23.

Lehrsatz 1. (Der sogenannte Sinussatz.) In jedem Dreieck verhalten sich die Seiten wie die Sinus ihrer Gegenwinkel.

Fig. 7. **Behauptung.** $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$.

Beweis 1. Fällt man die Höhe CD , so ist CD eben sowohl $= a \cdot \sin B$, als $b \cdot \sin A$,
also $a \cdot \sin B = b \cdot \sin A$,

$$\underline{a : b = \sin A : \sin B.}$$

Fällt man AE , so erhält man auf dieselbe Weise

$$\underline{b : c = \sin B : \sin C,}$$

$$\text{auch } \underline{a : c = \sin A : \sin C.}$$

Ist das Dreieck stumpfwinklig, so fallen die Höhen aus den spitzen Winkeln außerhalb des Dreiecks; dies ändert jedoch im Beweise nichts, da sie eben sowohl Sinuslinien des stumpfen Winkels, als seines Supplementwinkels sind.

Beweis 2. Beschreibt man um das Dreieck einen Kreis und verbindet die Winkelpunkte mit dem Mittelpunkte, so verhält sich

$$a : b : c = \frac{a}{2} : \frac{b}{2} : \frac{c}{2},$$

folglich, da $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$ die Sinuslinien der zu den Seiten gehörigen halben Centriwinkel oder ganzen Peripheriewinkel sind, auch

$$a : b : c = r \cdot \sin A : r \cdot \sin B : r \cdot \sin C, \text{ d. i.} \\ = \sin A : \sin B : \sin C.$$

Folgerung. Der Radius des um ein Dreieck beschriebenen Kreises ist gleich der Hälfte irgend einer Seite, dividiert durch den Sinus ihres Gegenwinkels.

$$r = \frac{\frac{1}{2}a}{\sin A}, \text{ da } \frac{a}{2} = r \cdot \sin A.$$

Lehrsatz 2. (Der Tangentialsatz.) In jedem Dreieck verhält sich die Summe irgend zweier Seiten zu ihrer Differenz wie die Tangente der halben Summe ihrer Gegenwinkel zur Tangente der halben Differenz dieser Winkel.

Behauptung. $a + b : a - b = \tan \frac{A + B}{2} : \tan \frac{A - B}{2}.$

Beweis. Nach dem Sinussatz ist

$$a : b = \sin A : \sin B,$$

$$a + b : a - b = \sin A + \sin B : \sin A - \sin B, \text{ d. i.}$$

$$= 2 \sin \frac{A + B}{2} \cdot \cos \frac{A - B}{2} : 2 \sin \frac{A - B}{2} \cdot \cos \frac{A + B}{2}.$$

Dividiert man nun die beiden letzten Glieder durch

$$2 \cos \frac{A + B}{2} \cdot \cos \frac{A - B}{2}, \text{ so ergibt sich die Behauptung.}$$

Auch durch Konstruktion läßt sich die Richtigkeit des Satzes zeigen. Fig. 8. Beschreibt man nämlich mit der kleineren b der beiden Seiten aus ihrem gemeinschaftlichen Endpunkte C einen Kreis, welcher die größere in D und ihre Verlängerung in E schneidet, verbindet alsdann die freien Punkte und zieht zu der innern Verbindungslinie AD eine Parallele von B aus, bis sie die Verlängerung der äußern Verbindungslinie in F trifft: so ist

$$a + b = BE, \quad a - b = BD,$$

$$\angle A + B = \angle ACE = 2x, \text{ folglich } x \text{ oder } \angle FBE = \frac{A + B}{2} \text{ und}$$

$$\angle FBA = \frac{A - B}{2}, \text{ da } \angle FBA = \angle FBE - \angle B \text{ ist.}$$

Ferner ist $\angle DAE$, also auch $\angle F$ ein rechter, mithin

$$\tan \frac{A + B}{2} = \frac{FE}{FB} \text{ und } \tan \frac{A - B}{2} = \frac{FA}{FB}.$$

Da nun nach Planimetrie, § 129, Zusatz 2,

$$\begin{aligned} BE : BD &= FE : FA \\ &= \frac{FE}{FB} : \frac{FA}{FB}, \end{aligned}$$

so ist der Satz erwiesen.

Lehrsatz 3. (Der Projektionsatz.) In jedem Dreieck ist das Quadrat irgend einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, vermindert um das doppelte Produkt aus diesen beiden andern Seiten und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Fig. 7. **Behauptung.** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

Beweis. Nach einem bekannten Satze der Planimetrie (§ 119, 2) ist $a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot AD$.

Setzt man nun für AD den Wert $b \cdot \cos A$, so ergibt sich die Behauptung.

Anmerkung. Ist A ein stumpfer Winkel, also $\cos A = -\cos(180^\circ - A)$, so geht die Formel über in

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos(180^\circ - A).$$

Lehrsatz 4. (Der Cosinussatz.) In jedem Dreieck ist der Cosinus irgend eines Winkels gleich der Summe der Quadrate der beiden einschließenden Seiten weniger dem Quadrat der Gegenseite, alles dividiert durch das doppelte Produkt aus den beiden einschließenden Seiten.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Dies folgt unmittelbar aus der vorigen Gleichung.

Für logarithmische Berechnung geeigneter sind die Formeln in nachfolgendem

$$\text{Zusatz. } \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{S(S-2a)}{4bc}} \text{ oder } = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}S(\frac{1}{2}S-a)}{bc}},$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(S-2b)(S-2c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}S-b)(\frac{1}{2}S-c)}{bc}} \text{ und}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}S-b)(\frac{1}{2}S-c)}{\frac{1}{2}S(\frac{1}{2}S-a)}},$$

wenn unter S die Summe der Seiten verstanden wird.

$$\text{Denn nach § 13, 3 ist } \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}},$$

$$\text{also } = \sqrt{\frac{1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2}} \text{ oder, wenn man die angeedeuteten}$$

Rechnungen ausführt,

$$\begin{aligned}\cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc}} \\ &= \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}.\end{aligned}$$

Setzt man nun $a + b + c = S$, also $b + c - a = S - 2a$,
so erhält man $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{S(S-2a)}{4bc}}$ oder $= \sqrt{\frac{\frac{1}{2}S(\frac{1}{2}S-a)}{bc}}$.

Auf dieselbe Weise ergibt sich aus $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$, da
 $2bc - b^2 - c^2 = -(b-c)^2$ ist,

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(S-2b)(S-2c)}{4bc}} \text{ oder } \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}S-b)(\frac{1}{2}S-c)}{bc}},$$

$$\text{demnach } \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}S-b)(\frac{1}{2}S-c)}{\frac{1}{2}S(\frac{1}{2}S-a)}}$$

$$\text{und } \sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{\frac{1}{2}S(\frac{1}{2}S-a)(\frac{1}{2}S-b)(\frac{1}{2}S-c)}.$$

Wie lauten die entsprechenden Formeln für Winkel B und C?

§ 24.

Auf den Sinussatz geht man zurück, wenn entweder eine Seite
und zwei Winkel, also auch der dritte,

oder zwei Seiten und der der größeren von ihnen gegenüber
liegende Winkel gegeben sind.

Es sei z. B. a , $\angle A$ und $\angle B$ gegeben; so ist $\angle C = 180^\circ - (A+B)$,

$$b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A} \text{ und } c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{a \cdot \sin(A+B)}{\sin A}.$$

Geht man nun zu den Logarithmen über, so erhält man

$$\log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A \text{ u. s. w.}$$

Die beiden subtraktiven 10 (s. § 18, 4) heben einander auf, können
also unberücksichtigt bleiben.

Oder: Man hat a , b und $\angle A$.

$$\text{Dann ist } \sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a} \text{ und}$$

$\log \sin B = \log b + \log \sin A - \log a$, also $\angle B$, demnach auch
 $\angle C$ und endlich Seite c leicht zu finden.

Die Aufgabe ist aber nur dann immer lösbar und bestimmt, wenn
 $a > b$ ist. Dann ist nämlich $\frac{b \cdot \sin A}{a} < 1$, also $\sin B$ möglich und
 $\angle B$ der spitze Winkel, den man in den Tafeln findet. Sein Supple-

mentwinkel, der denselben Sinus hat, kann nicht genommen werden, da $\angle B < A$, also ein spitzer Winkel sein muß.

Ist dagegen $b > a$, so kann $\frac{b \cdot \sin A}{a} >$ oder $=$ oder < 1 sein.

Im ersten Fall ist kein Dreieck möglich; im zweiten ist es rechtwinklig ($\sin 90^\circ = 1$); im dritten ist es unbestimmt (biform). Denn da $\frac{b \cdot \sin A}{a} > \sin A$ ist, so muß sowohl der spitze Winkel A , der diesen Sinus hat, als sein Supplementwinkel $> A$ sein. Es können also beide genommen werden. (Vergl. »Planimetrie« § 61, Aufgabe VII).

Auch bei dieser Aufgabe kann man die Subtraktion von 10 unterlassen, weil sie durch die nachherige Addition von 10 aufgehoben wird.

§ 25.

Der Tangentialatz kommt in Anwendung, wenn man aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zunächst die beiden andern Winkel finden will.

Ist z. B. a , b und $\angle C$ gegeben, so kennt man in der Proportion

$$a + b : a - b = \tan \frac{A + B}{2} : \tan \frac{A - B}{2}$$

die drei ersten Glieder $\left(\frac{A + B}{2} \text{ ist } = \frac{180^\circ - C}{2} \right)$, demnach auch das vierte, welches

$$\tan \frac{A - B}{2} = \frac{(a - b) \tan \frac{1}{2}(A + B)}{(a + b)} \text{ ist.}$$

Geht man nun zu den Logarithmen:

$$\log \tan \frac{A - B}{2} = \log (a - b) + \log \tan \frac{A + B}{2} - \log (a + b)$$

über (wiederum ohne Berücksichtigung von § 18, 4), so findet man $\frac{A - B}{2}$ aus den Tafeln, und A und B durch Addition und Subtraktion

von $\frac{A + B}{2}$ und $\frac{A - B}{2}$. Endlich ergibt sich Seite c mittelst des Sinusatzes.

Beispiel. Es sei $b = 502$ cm, $c = 870$ cm und $\angle A = 44^\circ 12' 28''$; so ist

$$c + b = 1372 \text{ cm, } c - b = 368 \text{ cm, } \frac{C + B}{2} = 67^\circ 53' 46'',$$

also $\log \tan \frac{C - B}{2} = 9,8198212$ und

$$\frac{C - B}{2} = 33^\circ 26' 29,9'', \text{ folglich } C = 101^\circ 20' 15,9'' \text{ und } B = 34^\circ 27' 16,1''.$$

Will man aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel sofort die dritte Seite berechnen, so bediene man sich des Projektionsatzes. Nach diesem hat man, wenn b , c und $\angle A$ gegeben ist, $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A}$, also nach den Daten des letzten Beispiels $= \sqrt{252004 + 756900 - 1004,870 \cdot \cos 44^\circ 12' 28''} = 618,692 \text{ cm.}$ Hinsichtlich der Berechnung dieses Ausdrucks siehe »Arithmetik« § 59 extr.

§ 26.

Der Cosinussatz dient zur Auflösung eines Dreiecks, wenn seine drei Seiten gegeben sind.

Die Formel für den Cosinus des ganzen Winkels wendet man jedoch nur dann mit Vorteil an, wenn a , b und c nicht mehrziffrige Zahlen sind; ist dies nicht der Fall, so wähle man die Formeln in dem zum Cosinussatz gehörigen Zusatz.

Es sei z. B. $a = 7 \text{ m}$, $b = 12 \text{ m}$, $c = 16 \text{ m}$.

Dann ist $\cos A = \frac{144 + 256 - 49}{24 \cdot 16} = \frac{351}{384}$, also

$$\log \cos A = 2,5453071 - 2,5843312 + 10 \\ = 9,9609759, \text{ folglich } \angle A = 23^\circ 55' 37,4'';$$

$$\text{ferner } \cos C = \frac{49 + 144 - 256}{168} = -\frac{63}{168},$$

demnach $\angle C$ ein stumpfer Winkel, und der Cosinus seines Supplementwinkels, nämlich $\cos(180^\circ - C) = +\frac{63}{168}$. Rechnet man nun wie vorher, so erhält man

$$\angle 180^\circ - C = 67^\circ 58' 32,5'', \text{ mithin}$$

$$\angle C = 112^\circ 1' 27,5'' \text{ und}$$

$$\angle B = 44^\circ 2' 55,1''.$$

Ist zufällig das subtraktive Quadrat gleich der Summe der beiden andern Quadrate, also der Zähler, mithin auch der ganze Bruch gleich null, so ist der Winkel (in Übereinstimmung mit dem Pythagoreischen Satz) ein rechter.

Ist dagegen $a = 728\frac{3}{4} \text{ m}$, $b = 490 \text{ m}$ und

$c = 864,25 \text{ m}$, so ist

$\frac{1}{2}S = 1041,4583 \text{ m}$, $\frac{1}{2}S - a = 312,7916 \text{ m}$, $\frac{1}{2}S - b = 551,4583 \text{ m}$ und $\frac{1}{2}S - c = 177,2083 \text{ m}$, demnach

$$\log \cos \frac{A}{2} = \frac{1}{2}(\log 1041,4583 + \log 312,7916 - \log 490 - \log 864,25) \\ = 0,9430309 - 1 \text{ oder, nach Addition von } 10, \\ = 9,9430309,$$

$$\text{folglich } \angle \frac{A}{2} = 28^\circ 42' 35,6'' \text{ und } \angle A = 57^\circ 25' 11,3''.$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$\angle \frac{B}{2} = 17^{\circ} 15' 29,3'', \text{ also } \angle B = 34^{\circ} 30' 58,6'',$$

folglich $\angle C = 88^{\circ} 3' 50''$.

Will man alle Winkel eines Dreiecks berechnen, so bedient man sich am besten der Formel für die Tangente des halben Winkels.

Anmerkung. Will man aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel alles Übrige finden, und sind die Seiten kürzere Zahlen, so thut man wohl, zuerst die dritte Seite mittelst des Projektionsfazes und das Übrige mittelst § 23, Lehrf. 4 zu berechnen.

Berechnung des Flächeninhaltes.

§ 27.

Die einfachste trigonometrische Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks ist $F = \frac{bc \cdot \sin A}{2}$ oder $\frac{ac \cdot \sin B}{2}$ oder $\frac{ab \cdot \sin C}{2}$, in Worten: Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkte aus zwei Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.

Sie ergibt sich unmittelbar aus

Fig. 7.
$$F = \frac{c \cdot CD}{2},$$

wenn man CD als Sinuslinie von A oder B darstellt.

In Anwendung kommt sie zunächst, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind. Man kann jedoch auch in allen übrigen Fällen auf sie zurückgehen, da man zu den gegebenen Stücken immer eins der Art finden kann, daß man zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel kennt.

§ 28.

Will man dagegen aus dem Flächeninhalt F und zwei Winkeln eine Seite, z. B. a berechnen, so bedarf man eines Ausdrucks von F durch a und die Winkel. Man erhält ihn, wenn man in der Formel $F = \frac{ab \cdot \sin C}{2}$ die Seite b mittelst des Sinusfazes eliminiert. Nach diesem ist

$$\begin{aligned} b &= \frac{a \cdot \sin B}{\sin A}, \text{ also} \\ F &= \frac{a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{2 \sin A}, \text{ ebenso} \\ &= \frac{b^2 \cdot \sin A \cdot \sin C}{2 \sin B} \text{ und } = \frac{c^2 \cdot \sin A \cdot \sin B}{2 \sin C} \end{aligned}$$

Demnach ist $a = \sqrt{\frac{2F \cdot \sin A}{\sin B \cdot \sin C}}$ u. s. w.

Auch folgt, daß $h = \frac{a \cdot \sin B \cdot \sin C}{\sin A}$, wenn nämlich h die auf a gefällte Höhe bedeutet.

In gleicher Weise ergibt sich ein Ausdruck von F durch die Seiten (siehe »Planimetrie« § 166, 4), wenn man in $F = \frac{bc \cdot \sin A}{2}$, d. i. $= bc \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}$ für $\sin \frac{A}{2}$ und $\cos \frac{A}{2}$ die in § 23 extr. gefundenen Werte einträgt. Man erhält

$$F = bc \cdot \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}S - c)(\frac{1}{2}S - b)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{2}S \cdot (\frac{1}{2}S - a)}{bc}}, \text{ d. i. } \\ = \sqrt{\frac{S}{2} \left(\frac{S}{2} - a \right) \left(\frac{S}{2} - b \right) \left(\frac{S}{2} - c \right)}.$$

Nunmehr läßt sich auch der Radius des um ein Dreieck beschriebenen Kreises durch die Seiten ausdrücken.

Nach § 23, Folg. ist nämlich $r = \frac{\frac{1}{2}a}{\sin A}$; eliminiert man nun $\sin A$ mittelst der Formel $F = \frac{bc \cdot \sin A}{2}$, so gelangt man zu

$$r = \frac{abc}{4F} \text{ (s. »Planimetrie« § 166, 14)} \\ = \frac{abc}{\sqrt{S(S-2a)(S-2b)(S-2c)}}.$$

Daß der Radius des in ein Dreieck beschriebenen Kreises

$$r = \frac{2F}{a+b+c}, \text{ also } \\ = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}S(\frac{1}{2}S-a)(\frac{1}{2}S-b)(\frac{1}{2}S-c)}}{\frac{1}{2}S},$$

ist in der Planimetrie am a. O. nachgewiesen worden.

A n h a n g.

1. Zusammenstellung der wichtigsten goniometrischen Formeln.

a. Bereits entwickelte.

- 1) $\operatorname{tang} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$
- 2) $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tang} \alpha}.$
- 3) ~~$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}.$~~
- 4) ~~$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$~~
- 5) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, folglich
- 6) $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ und
- 7) $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$
- 8) ~~$\sec \alpha = \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha}.$~~
- 9) ~~$\operatorname{cosec} \alpha = \sqrt{1 + \cot^2 \alpha}.$~~
- 10) $\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha.$
- 11) $\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha.$
- 12) $\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta.$
- 13) $\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta.$
- 14) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$ *$\sin \alpha = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$*
- (15) $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ oder $2 \cos^2 \alpha - 1.$)
- 16) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$
- 17) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$
- 18) $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$, demnach $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$
- 19) $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$ und $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$
- 20) $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$
- 21) $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$

$$22) \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$23) \cos \beta - \cos \alpha = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$24) \tan (\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}.$$

$$25) \tan (\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}.$$

$$26) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$$

$$27) \tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}.$$

$$28) \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

$$29) \cot (\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta - 1}{\cot \beta + \cot \alpha}.$$

$$30) \cot (\alpha - \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha}.$$

$$31) \cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha} = \frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{2}.$$

b. Formeln, welche aus den voranstehenden sich leicht ergeben.

$$32) \sin \alpha + \cos \alpha = \cos (\alpha - 45^\circ) \cdot \sqrt{2} \text{ oder}$$

$$= \cos (45^\circ - \alpha) \cdot \sqrt{2},$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \sin (\alpha - 45^\circ) \cdot \sqrt{2} \text{ oder}$$

$$= -\sin (45^\circ - \alpha) \cdot \sqrt{2}.$$

Folgt aus 20 und 21, insofern $\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha)$ ist.

$$33) \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \text{ oder } \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha = \sin (\alpha + \beta) \cdot \sin (\alpha - \beta).$$

Ergiebt sich durch Multiplikation von 20 und 21.

$$34) \sin^2 \alpha - \cos^2 \beta \text{ oder } \sin^2 \beta - \cos^2 \alpha = -\cos (\alpha + \beta) \cdot \cos (\alpha - \beta).$$

Ergiebt sich durch Multiplikation von 12 u. 13, mit Zuziehung von 5.

$$35) \left. \begin{aligned} \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} &= \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \\ \frac{\sin \alpha \pm \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} &= \tan \frac{\alpha \pm \beta}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$36) \frac{\sin \alpha \pm \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \tan \frac{\alpha \pm \beta}{2}.$$

$$37) \frac{\sin \alpha \pm \sin \beta}{\cos \beta - \cos \alpha} = \cot \frac{\alpha \mp \beta}{2}.$$

$$38) \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \beta - \cos \alpha} = \cot \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cot \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Man erhält 35 bis 38, wenn man die Formeln 20 bis 23 durch einander dividiert.

$$\left. \begin{aligned} 39) \quad \tan \alpha \pm \tan \beta &= \frac{\sin (\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \\ 40) \quad \cot \beta \pm \cot \alpha &= \frac{\sin (\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} \\ 41) \quad \cot \alpha \pm \tan \beta &= \frac{\cos (\alpha \mp \beta)}{\sin \alpha \cdot \cos \beta} \end{aligned} \right\}$$

Dies folgt aus 1 und 2, in Verbindung mit 10 bis 13.

Daß $\cot \alpha + \tan \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$ ist, ergibt sich aus 41, wenn $\beta = \alpha$ angenommen wird.

$$42) \quad \tan^2 \alpha - \tan^2 \beta = \frac{\sin (\alpha + \beta) \cdot \sin (\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta}.$$

Ergiebt sich durch Multiplikation der beiden Formeln in 39.

$$43) \quad \cot^2 \beta - \cot^2 \alpha = \frac{\sin (\alpha + \beta) \cdot \sin (\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}.$$

Folgt ebenso aus 40.

$$44) \quad \frac{\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta}{\cot^2 \beta - \cot^2 \alpha} = \tan^2 \alpha \cdot \tan^2 \beta.$$

Man dividire 42 durch 43.

$$45) \quad \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{\cot \beta \pm \cot \alpha} = \tan \alpha \cdot \tan \beta.$$

Man dividire 39 durch 40.

$$46) \quad \sin (\alpha + \beta + \gamma) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma.$$

$$47) \quad \cos (\alpha + \beta + \gamma) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma - \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma - \sin \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos \alpha.$$

Folgt aus 10 und 12.

2. Übungsaufgaben mit Andeutung ihrer Auflösung.

a) Zu beweisen:

48) Die Sinus der Winkel eines Dreiecks sind zusammen gleich dem vierfachen Produkte aus den Cosinus der halben Winkel.

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}.$$

Man vereinige $\sin A + \sin B$ nach 20, beachte, daß

$$\sin C = \sin (A + B) = 2 \sin \frac{A + B}{2} \cdot \cos \frac{A + B}{2} \quad \text{und}$$

$$\sin \frac{A + B}{2} = \cos \frac{C}{2} \quad \text{ist, und wende 22 an.}$$

49) Die Cosinus der Winkel eines Dreiecks sind zusammen um eins größer als das vierfache Produkt aus den Sinus der halben Winkel.

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}.$$

Man verfare wie vorher ; d. h. man vereinige die beiden ersten Funktionen, erseze $\angle C$ durch $\frac{A+B}{2}$ und fasse von neuem zusammen.

In gleicher Weise ergeben sich die beiden nächsten Sätze :

- 50) Die Sinus der doppelten Winkel eines Dreiecks sind zusammen gleich dem vierfachen Produkte aus den Sinus der einfachen Winkel.

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C.$$

- 51) Die Cosinus der doppelten Winkel eines Dreiecks sind zusammen um eins kleiner als das negativ genommene vierfache Produkt der Cosinus der einfachen Winkel.

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -4 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C - 1.$$

- 52) Die Tangenten der Winkel eines Dreiecks sind zusammen gleich ihrem Produkte.

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C.$$

Man stelle $\tan A + \tan B$ aus 24 dar und berücksichtige § 11.

- 53) Die Cotangenten der halben Winkel eines Dreiecks sind zusammen gleich ihrem Produkte.

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}.$$

Der Beweis ist dem vorigen analog.

- 54) Die Quadrate der Cosinus der halben Winkel eines Dreiecks sind zusammen um zwei größer als das doppelte Produkt aus den Sinus der halben Winkel.

$$\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} = 2 + 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}.$$

Durch Anwendung von 19 gelangt man zu einem Ausdruck, in welchem man den für $\cos A + \cos B + \cos C$ gefundenen Wert eintragen kann.

- 55) Die Quadrate der Sinus der halben Winkel sind zusammen kleiner als eins um das doppelte Produkt aus den Sinus der halben Winkel.

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}.$$

Das Verfahren ist dem vorigen ähnlich.

- 56) Jede Seite eines Dreiecks ist gleich der Summe der Produkte aus den beiden andern Seiten in die Cosinus der Winkel, welche sie mit der ersten Seite bilden.

$$c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A.$$

Denn es ist $c = AD + BD$ u. s. w.

Fig. 7.

Drückt man in dieser Formel $\cos A$ durch $\sin A$ aus und eliminiert $\sin A$ durch den Sinussatz, so ergibt sich

$$c = a \cos B \pm \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 B} \text{ und}$$

$$F = \frac{a}{2} \sin B (a \cdot \cos B \pm \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 B}).$$

Somit ist der Flächeninhalt eines Dreiecks durch zwei Seiten

und den Gegenwinkel der einen Seite dargestellt. Kehrt man die Formel in der Art um wie die ähnliche Formel in § 28, so gelangt man auf etwas mühsame Weise zu:

$$a = \sqrt{\frac{b^2}{4} + F \cdot \cot \frac{B}{2}} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - F \cdot \tan \frac{B}{2}}.$$

Ein geeigneteres Verfahren zur Herstellung dieser Gleichung wird in 78 gezeigt werden.

- 57) Der Flächeninhalt eines jeden Vierseits ist gleich dem halben Produkte aus seinen beiden Diagonalen und dem Sinus des von ihnen gebildeten Winkels.

Man addiere die vier entstandenen Dreiecke.

- 58) In jedem Vierseit im Kreise ist der Cosinus irgend eines Winkels gleich der Summe der Quadrate der ihn einschließenden Seiten, weniger der Summe der Quadrate der Gegenseiten, dividiert durch die Summe der doppelten Produkte aus den einschließenden und den gegenüber liegenden Seiten.

Fig. 9.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2bc + 2ad}.$$

Man drücke das Quadrat der Diagonale BD mittelst des Projektionsfahes zweifach aus, setze die Werte gleich und berücksichtige, daß $\cos C = -\cos A$ ist.

Demnach ist, wenn S den Umring des Vierseits bedeutet,

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}S - a)(\frac{1}{2}S - d)}{bc + ad}},$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}S - b)(\frac{1}{2}S - c)}{bc + ad}} \text{ und}$$

$$F_4 = \sqrt{\left(\frac{S}{2} - a\right)\left(\frac{S}{2} - b\right)\left(\frac{S}{2} - c\right)\left(\frac{S}{2} - d\right)}.$$

Die Entwicklung dieser Formeln ist ähnlich der der entsprechenden Formeln vom Dreieck (s. § 23, Behrsf. 4), in welche sie übergehen, wenn man $d = 0$ setzt.

- 59) Der Radius des in ein Dreieck eingeschriebenen Kreises ist gleich einer Seite des Dreiecks, dividiert durch die Summe der Cotangenten der halben anliegenden Winkel.

Fig 10

$$\varrho = \frac{a}{\cot \frac{1}{2}B + \cot \frac{1}{2}C};$$

denn es ist $a = BE + EC$ u. s. w.

Wendet man 40 auf die gefundene Formel an, so erhält man

$$\varrho = \frac{a \cdot \sin \frac{1}{2}B \cdot \sin \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}A}.$$

Dasselbe ergibt sich auch, wenn man ϱ aus dem Dreieck BCD nach § 28 als Höhe darstellt.

- 60) Der Radius des in ein Dreieck eingeschriebenen Kreises ist gleich dem Radius des umschriebenen Kreises, multipliciert mit dem vierfachen Produkte aus den Sinus der halben Winkel des Dreiecks.

$$\varrho = 4r \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}.$$

Dies folgt leicht aus § 23, Folg.

- 61) Der Radius des zu einer Dreiecksseite gehörigen äußern Berührungskreises (d. i. desjenigen Kreises, welcher jene Seite und die Verlängerungen der beiden andern Seiten berührt) ist gleich jener Seite, dividirt durch die Summe der Tangenten der halben anliegenden Winkel.

$$\varrho' = \frac{a}{\tan \frac{1}{2}B + \tan \frac{1}{2}C};$$

Fig. 10

denn $\angle FBC$ und $\angle FCB$ sind die Komplemente der $\angle \frac{B}{2}$ und $\frac{C}{2}$.
Demnach ist

$$\varrho' = \frac{a \cdot \cos \frac{1}{2}B \cdot \cos \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}A}.$$

In gleicher Weise ergibt sich

$$\varrho'' = \frac{b \cdot \cos \frac{1}{2}A \cdot \cos \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}B} \text{ und}$$

$$\varrho''' = \frac{c \cdot \cos \frac{1}{2}A \cdot \cos \frac{1}{2}B}{\cos \frac{1}{2}C}.$$

- 62) Die Summe der Radien der zu zwei Seiten gehörigen äußeren Berührungskreise ist gleich der dritten Seite, multipliciert mit der Cotangente ihres halben Gegenwinkels im Dreieck.

$$\varrho'' + \varrho''' = a \cdot \cot \frac{A}{2}.$$

Denn eliminiert man in den beiden Ausdrücken für ϱ'' und ϱ''' die Seiten b und c mittelst des Sinussatzes und geht von den ganzen Winkeln zu den halben über, so ergibt die Addition der erhaltenen Brüche

$$\varrho'' + \varrho''' = \frac{a \cdot \sin \frac{1}{2}(B + C)}{\sin \frac{1}{2}A} \text{ u. s. w.}$$

- 63) Die Summe der Radien der äußeren Berührungskreise ist gleich dem Radius des in das Dreieck und dem vierfachen Radius des um das Dreieck beschriebenen Kreises zusammen genommen.

$$\varrho + \varrho'' + \varrho''' = \varrho + 4r.$$

Denn zunächst ist

$$\begin{aligned} \varrho + \varrho'' + \varrho''' &= \frac{a \cdot \cos \frac{1}{2}B \cdot \cos \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}A} + \frac{a \cdot \cos \frac{1}{2}A}{\sin \frac{1}{2}A} \\ &= \frac{a(\cos \frac{1}{2}B \cdot \cos \frac{1}{2}C \cdot \sin \frac{1}{2}A + \cos^2 \frac{1}{2}A)}{\sin \frac{1}{2}A \cdot \cos \frac{1}{2}A} \\ &= \frac{a(\cos \frac{1}{2}B \cdot \cos \frac{1}{2}C - \sin \frac{1}{2}A)}{\cos \frac{1}{2}A} + \frac{a}{\sin \frac{1}{2}A \cdot \cos \frac{1}{2}A}. \end{aligned}$$

woraus sich, da $\cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = \frac{1}{2} \cos \frac{B+C}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{B-C}{2}$

ist, nach einigen Umformungen die Behauptung leicht ergibt.

- 64) Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem doppelten Quadrat des Radius des umschriebenen Kreises, multipliziert mit den Sinus der drei Winkel.

$$F = 2r^2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C.$$

Man erhält diesen Ausdruck, wenn man in $F = \frac{bc \cdot \sin A}{2}$ die Seiten b und c mittelst r eliminiert.

Anmerkung. Aus dieser Formel ergibt sich, wenn man die Werte von ϱ , ϱ , ϱ , und ϱ , in Nr. 60 und Nr. 61 mit einander multipliziert und abc durch $4rF$ ersetzt, die merkwürdige Formel

$$\varrho \cdot \varrho \cdot \varrho \cdot \varrho = F^2.$$

b) Aufgaben vom rechtwinkligen und vom gleichschenkligen Dreieck.

- 65) Aus dem einen spitzen Winkel A eines rechtwinkligen Dreiecks und der Summe s der ihn einschließenden Seiten das Übrige zu finden.

Auflösung. Drückt man in der Gleichung $b + c = s$ die Kathete b durch c und $\angle A$ aus, so ergibt sich

$$c = \frac{s}{2 \cos^2 \frac{1}{2} A}, \text{ demnach}$$

$$a = s \cdot \tan \frac{A}{2},$$

$$b = \frac{s \cdot \cos A}{2 \cos^2 \frac{1}{2} A} \text{ und (nach § 21, 2)}$$

$$F = \frac{s^2 \cdot \sin 2A}{16 \cos^4 \frac{1}{2} A}.$$

Ist statt der Summe s die Differenz d gegeben, so findet man

$$c = \frac{d}{2 \sin^2 \frac{1}{2} A}, a = d \cdot \cot \frac{1}{2} A,$$

$$b = \frac{d \cos A}{2 \sin^2 \frac{1}{2} A} \text{ und } F = \frac{d^2 \sin 2A}{16 \sin^4 \frac{1}{2} A}.$$

- 66) Aus dem einen spitzen Winkel A und der Summe s der beiden Katheten das Übrige zu finden.

Auflösung. Drückt man a und b durch c aus, so erhält man

$$c = \frac{s}{\cos(A - 45^\circ) \cdot \sqrt{2}} \text{ u. f. w.}$$

Ist statt der Summe die Differenz der Katheten ($a - b = d$) bekannt, so hat man

$$c = \frac{d}{\sin(A - 45^\circ) \cdot \sqrt{2}} \text{ u. f. w.}$$

Beide Aufgaben kann man auch mittelst des Tangentialsatzes lösen.

- 67) Aus einem spitzen Winkel A und dem Ueberschuß d der Katheten-
summe über die Hypotenuse das Übrige zu berechnen.

Auflösung. Man erhält

$$c = \frac{d}{2\sin\frac{1}{2}A \cdot \sin(45^\circ - \frac{1}{2}A) \cdot \sqrt{2}} \text{ u. f. w.}$$

- 68) Das Dreieck zu lösen, wenn man außer dem spitzen Winkel A die
Differenz der einen Kathete von der Summe der beiden andern
Seiten hat.

Auflösung. Ist $a + c - b = d$, so ergibt sich

$$c = \frac{d}{2\sin\frac{1}{2}A \cdot \cos(45^\circ - \frac{1}{2}A) \cdot \sqrt{2}} \text{ u. f. w.}$$

- 69) Aus der Hypotenuse c und der Summe s der beiden Katheten einen
Winkel zu finden.

Auflösung. $\cos(A - 45^\circ) = \frac{s\sqrt{2}}{2c}$.

Ist statt der Summe die Differenz der Katheten ($a - b = d$)
gegeben, so erhält man $\sin(A - 45^\circ) = \frac{d\sqrt{2}}{2c}$.

- 70) Aus zwei ungleichen Höhen eines gleichschenkligen Dreiecks die
Winkel zu berechnen.

Auflösung. Bedeutet h die auf die Basis b gefällte Höhe, h,
die auf den Schenkel a gefällte, so ist der Cosinus des Basis-
winkels, nämlich $\cos A = \frac{h}{2h}$.

Denn es ist $2h \cdot \cot A = \frac{h}{\sin A}$.

- 71) Aus der Summe s jener beiden Höhen und dem Basiswinkel A
die Seiten zu finden.

Auflösung. $b = \frac{s \cdot \cos A}{\sin\frac{3}{2}A \cdot \cos\frac{1}{2}A}$ und

$$a = \frac{s}{2\sin\frac{3}{2}A \cdot \cos\frac{1}{2}A}.$$

Ist statt der Summe der Höhen ihre Differenz d gegeben, so
erhält man, wenn $h > h$, also $\angle A > 60^\circ$ ist,

$$b = -\frac{d \cdot \cos A}{\sin\frac{1}{2}A \cdot \cos\frac{3}{2}A},$$

und wenn $h < h$, also $\angle A < 60^\circ$ ist,

$$b = \frac{d \cos A}{\sin\frac{1}{2}A \cdot \cos\frac{3}{2}A}.$$

- 72) Die Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks zu finden, wenn der
Winkel an der Spitze B und die Summe s von Schenkel und Höhe
gegeben sind.

Auflösung. $a = \frac{s}{2\cos\frac{1}{2}B}$ und

$$b = 2s \cdot \tan\frac{B}{4}.$$

Wie ändert sich die Formel, wenn man statt der Summe die Differenz hat?

- 73) Aus dem Umfang S eines gleichschenkligen Dreiecks und der auf die Basis gefällten Höhe h die Winkel zu berechnen.

Auflösung. $\cot\frac{A}{2} = \frac{S}{2h}.$

c) Aufgaben vom schiefwinkligen ungleichseitigen Dreieck.

- 74) Aus der Summe der Seiten eines Dreiecks und seinen Winkeln die Seiten zu finden.

Auflösung. Eliminiert man in der Gleichung $a + b + c = S$ die Seiten b und c mittelst des Sinussatzes und führt die Addition aus, so ergibt sich (nach § 48)

$$a = \frac{S \cdot \sin\frac{1}{2}A}{2\cos\frac{1}{2}B \cdot \cos\frac{1}{2}C}, \text{ u. f. w. ,}$$

$$\text{demnach } F = \frac{S^2}{4} \cdot \tan\frac{A}{2} \cdot \tan\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{C}{2}.$$

Ist nicht $b + c + a$, sondern $b + c - a = d$ gegeben, so

$$\text{findet man } a = \frac{d \cdot \sin\frac{1}{2}A}{2\sin\frac{1}{2}B \cdot \sin\frac{1}{2}C},$$

$$\text{demnach } b = \frac{d \cdot \cos\frac{1}{2}B}{2\cos\frac{1}{2}A \cdot \cos\frac{1}{2}(A + B)} \text{ u. f. w.}$$

- 75) Aus einer Seite a , der Summe s der beiden andern und dem Gegenwinkel der ersten Seite A die Winkel zu berechnen.

Die Auflösung ist der vorigen ähnlich. Man erhält

$$\cos\frac{B - C}{2} = \frac{s}{a} \cdot \sin\frac{A}{2}.$$

Ist statt der Summe von b und c ihre Differenz ($b - c = d$) gegeben, so erhält man

$$\sin\frac{B - C}{2} = \frac{d}{a} \cdot \cos\frac{A}{2}.$$

Anmerkung. Will man aus den gegebenen Bestimmungen zunächst die Seiten berechnen, so nehme man den Projektionsatz zu Hilfe.

- 76) Aus einer Seite a , der Summe der beiden andern ($b + c = s$) und dem einen der an der ersten anliegenden Winkel B die andern Winkel zu finden.

Auflösung. Verfährt man wie in 75, so ergibt sich

$$\cos \frac{B-C}{2} = \frac{s}{a} \cdot \cos \frac{B+C}{2} \text{ oder}$$

$$\cos \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2} \right) = \frac{s}{a} \cdot \cos \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right),$$

und hieraus endlich $\tan \frac{C}{2} = \frac{s-a}{s+a} \cdot \cot \frac{B}{2},$

Ist, außer a und $\angle B$, $b-c=d$ gegeben, so geht die Formel über in $\tan \frac{C}{2} = \frac{a-d}{a+d} \cdot \tan \frac{B}{2}.$

Auch diese Aufgaben kann man mittelst des Projektionsgesetzes lösen.

- 77) Aus der Summe oder der Differenz zweier Seiten und ihren Gegenwinkeln die Seiten zu berechnen.

Am leichtesten mittelst des Tangentialgesetzes aufzulösen.

- 78) Aus einer Seite a , ihrem Gegenwinkel A und dem Flächeninhalt F des Dreiecks die andern Seiten zu finden.

Auflösung. Aus dem Projektionsgesetz folgt

$$b^2 + c^2 = a^2 + 2bc \cdot \cos A,$$

$$\text{demnach } (b+c)^2 = a^2 + 4bc \cdot \cos^2 \frac{A}{2}$$

$$\text{und } (b-c)^2 = a^2 - 4bc \cdot \sin^2 \frac{A}{2}.$$

Eliminiert man in diesen Gleichungen bc mittelst $F = \frac{bc \cdot \sin A}{2}$, so erhält man

$$b+c = \sqrt{a^2 + 4F \cdot \cot \frac{A}{2}} \text{ und}$$

$$b-c = \sqrt{a^2 - 4F \cdot \tan \frac{A}{2}}, \text{ mithin auch } b \text{ und } c.$$

Ist statt des Flächeninhaltes die aus A gefällte Höhe gegeben, so ersetze man $4F$ durch $2ah$; ist statt a der Radius r des umschriebenen Kreises bekannt, so ersetze man a durch $2r \cdot \sin A$.

Will man aus a , $\angle A$ und F zunächst die Winkel finden, so löse man die Gleichung $F = \frac{a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{2 \sin A}$ in bezug auf $\sin B \cdot \sin C$

auf und ersetze dieses Produkt durch $\frac{1}{2} \cos (B-C) - \frac{1}{2} \cos (B+C).$

- 79) Aus einer Seite a , der Summe der beiden andern Seiten ($b+c=s$) und dem Flächeninhalt des Dreiecks das Übrige zu finden.

Auflösung. Aus $s = \sqrt{a^2 + 4F \cdot \cot \frac{A}{2}}$

ergibt sich ein Wert für $\cot \frac{A}{2}$, demnach das Übrige entweder nach 78 oder nach 75.

Statt der Summe von b und c kann auch ihre Differenz, ebenso h statt F und $\angle A$ statt Seite a gegeben sein.

- 80) Aus dem Umring S eines Dreiecks, seinem Flächeninhalt F und dem einen Winkel A das Übrige, zunächst Seite a zu finden.

Auflösung. Man löse die Gleichung

$$b + c \text{ oder } S - a = \sqrt{a^2 + 4F \cdot \cot \frac{A}{2}}$$

in Beziehung auf a auf.

- 81) Ein Dreieck zu berechnen, in welchem ein Winkel A , seine Gegenseite a und die Verhältnisse gegeben sind, in welchen Winkel und Seite durch ein und dieselbe Linie geteilt werden.

Fig. 11.

Auflösung. Ist $BD : CD = p : q$ und $\angle \mu : \nu = m : n$, also $\angle \mu$ und ν bekannte Größen, so stelle man AD mittelst des Sinussatzes aus den beiden Dreiecken ABD und ADC dar und setze die Werte gleich. Man erhält alsdann nach einigen Umformungen

$$\cot B = \frac{p \cdot \sin \nu}{q \cdot \sin \mu \cdot \sin A} - \cot A.$$

Übrigens kann, da aus

$$\frac{p \cdot \sin B}{\sin \mu} = \frac{q \cdot \sin C}{\sin \nu} \text{ sich } \frac{p \cdot \sin \nu}{q \cdot \sin \mu} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b} \text{ ergibt,}$$

also $b : c$ bekannt ist, auch der Tangentialatz angewendet werden.

- 82) Ein Dreieck aufzulösen, von welchem zwei Winkel A und B und die Transversale t aus dem dritten Winkel gegeben sind.

Auflösung. In ähnlicher Weise wie vorher ergibt sich

Fig. 12.

$$\cot o = \cot C + \frac{\sin B}{\sin A \cdot \sin C}, \text{ d. i. } = 2 \cot C + \cot A,$$

$$\text{und } c = \frac{2t \sin o}{\sin A}.$$

Statt der Transversale selbst kann auch die Summe aus der Transversale und der zugehörigen Seite gegeben sein.

- 83) Ein Dreieck aufzulösen, wenn ein Winkel C , die Transversale t nach der Gegenseite und der Radius des umschriebenen Kreises gegeben sind.

Fig. 12.

Auflösung. Zunächst ist $\frac{c}{2}$ und p bekannt, demnach auch $\angle DEC$ und $\angle CEB$, d. i. $2A$.

Übrigens ist, nachdem c gefunden, die Aufgabe mit 85) identisch.

- 84) Aus einem Winkel A und den beiden Abschnitten d und e , in welche die Höhe aus A die Gegenseite a teilt, die andern Winkel zu berechnen.

Auflösung. Liegt d an $\angle B$ an,

so ist $d \cdot \tan B = e \cdot \tan C$,

$$d \cdot \sin B \cdot \cos C = e \cdot \sin C \cdot \cos B;$$

$$\text{und da } \sin B \cdot \cos C = \frac{1}{2} \sin(B+C) + \frac{1}{2} \sin(B-C)$$

$$\text{und } \sin C \cdot \cos B = \frac{1}{2} \sin(B+C) - \frac{1}{2} \sin(B-C) \text{ ist,}$$

$$\text{muß } \sin(B-C) = \frac{e-d}{e+d} \sin(B+C) \text{ sein.}$$

- 85) Aus einer Seite a , ihrem Gegenwinkel A und der zugehörigen Transversale t die andern Seiten zu berechnen.

Auflösung. Aus den beiden Gleichungen

$$b^2 + c^2 = a^2 + 2bc \cdot \cos A$$

$$\text{und } b^2 + c^2 = 2t^2 + \frac{a^2}{2} \quad (\text{»Planimetrie« § 120})$$

findet man $2bc$, demnach auch $(b + c)^2$ und $(b - c)^2$ u. s. w.

- 86) Aus zwei Seiten eines Dreiecks a und b und der den eingeschlossenen Winkel halbierenden Linie m diesen Winkel zu finden.

Auflösung. Drückt man das gegebene Dreieck, desgleichen auch die beiden kleineren, deren Summe es ist, nach § 27 aus, so erhält man

$$\cos \frac{C}{2} = \frac{(a + b)m}{2ab}.$$

Ist, statt der beiden einzelnen Seiten a und b , ihre Summe s und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben, so löse man die beiden Gleichungen

$$ab = \frac{ms}{2 \cos \frac{1}{2} C} \quad \text{und} \quad a + b = s$$

in bezug auf a und b auf.

- 87) Aus einem Winkel eines Dreiecks und den Halbierungslinien der beiden andern Winkel (bis zum Durchschnittspunkt gerechnet) das Übrige zu finden.

Auflösung. Man wende den Tangentialatz oder den Projektionsatz an.

Noch leichter ist die Auflösung, wenn statt des Winkels seine Gegenseite oder der Radius ρ des einbeschriebenen Kreises gegeben ist.

- 88) Aus einer Seite, dem einen anliegenden Winkel und dem Radius des einbeschriebenen Kreises zunächst die andern Winkel zu berechnen.

Die Auflösung ergibt sich aus 59.

- 89) Aus einer Seite a , dem Gegenwinkel A und dem Radius ρ des einbeschriebenen Kreises das Übrige zu finden.

Auflösung. Ausgehend von den rechtwinkligen Dreiecken, welche

$\frac{A}{2}$ und ρ enthalten, zeige man, daß

$$b + c = a + 2\rho \cdot \cot \frac{A}{2} \quad \text{ist,}$$

$$\text{folglich (nach 75)} \quad \cos \frac{B - C}{2} = \frac{2\rho}{a} \cdot \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2}.$$

Dies ergibt sich auch aus 59.

Statt des Winkels A kann, wie man leicht sieht, auch $b + c$ gegeben sein, desgleichen statt der Seite a der Radius r des umschriebenen Kreises. Ist statt ρ der Radius ρ , des zur Seite a gehörigen äußeren Berührungskreises gegeben, so erhält man aus 61

$$\cos \frac{B - C}{2} = \frac{2\rho}{a} \cos \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2}.$$

(Demnach ist $\varphi_+ + \varphi_- = \frac{a \cdot \cos \frac{1}{2}(B-C)}{\cos \frac{1}{2}A}$ und $\varphi_+ - \varphi_- = a \cdot \tan \frac{A}{2}$.)

- 90) Aus einer Seite a , der Differenz der beiden andern ($b - c = d$) und dem Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises das Übrige zu berechnen.

Auflösung. Nach 89 ist

$$a + b = c + 2\varrho \cdot \cot \frac{C}{2},$$

$$\cot \frac{C}{2} = \frac{a + d}{2\varrho}.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich

$$\cot \frac{B}{2} = \frac{a - d}{2\varrho}.$$

- 91) Ein Dreieck aufzulösen, von welchem eine Seite a und die Senkrechten p , und $p_{,,}$ aus den Mitten der beiden andern Seiten (bis zum Durchschnittspunkt) gegeben sind.

Auflösung. Da die Linie, welche die Mitten von b und c verbindet, $= \frac{a}{2}$ ist, so kennt man von dem einen Dreieck alle Seiten, mithin auch den Winkel A .

Ist statt der Seite a der Winkel A gegeben, so hat man in eben jenem Dreieck zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, demnach

$$\frac{a}{2} = \sqrt{p^2 + p_{,,}^2 + 2p \cdot p_{,,} \cdot \cos A}.$$

- 92) Die Winkel eines Dreiecks zu finden, wenn die drei Senkrechten p , p , und $p_{,,}$ aus den Mitten der drei Seiten (bis zum Durchschnittspunkt) gegeben sind.

Auflösung. Eliminiert man in der Gleichung

$$\frac{a^2}{4} = p^2 + p_{,,}^2 + 2p \cdot p_{,,} \cdot \cos A$$

die Seite a , welche $= 2p \cdot \tan A$, und drückt man $\tan A$ durch $\sec A$ und endlich durch $\cos A$ aus: so ergibt sich nach einigen Umformungen die kubische Gleichung

$$\cos^3 A + \frac{p^2 + p_{,,}^2 + p_{,,}^2}{2p \cdot p_{,,}} \cos^2 A = \frac{p^2}{2p \cdot p_{,,}}.$$

- 93) Die Winkel eines Dreiecks zu finden, wenn seine drei Höhen h , h , und $h_{,,}$ gegeben sind.

Auflösung. Trägt man die aus den Gleichungen $a \cdot h = b \cdot h_{,,} = c \cdot h_{,,}$ entnommenen Werte von b und c in $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ein, so erhält man

$$\cos A = \frac{h^2 \cdot h_{,,}^2 + h^2 \cdot h_{,,}^2 - h_{,,}^2 \cdot h_{,,}^2}{2h^2 \cdot h_{,,} \cdot h_{,,}}$$

und in gleicher Weise $\cos B$ und $\cos C$.

- 94) Von einem Dreieck, dessen ein Winkel in drei Teile geteilt ist, Fig. 13. kennt man diese drei Teile und die zu den äußern Theilen gehörigen Abschnitte der Gegenseite. Man soll den mittlern Abschnitt dieser Seite finden.

Auflösung. Drückt man BD aus den Dreiecken ABD und BED mittelst des Sinussatzes zweifach aus und entfernt in der sich ergebenden Gleichung nach einigen Umformungen $\sin A$ durch Division, so erhält man

$$\cot A = \frac{d \cdot \sin n}{x \sin m \cdot \sin (m + n)} - \cot (m + n).$$

Verfährt man in gleicher Weise mit BE, so erhält man

$$\frac{e(\cos B + \cot A \cdot \sin B)}{\sin o} = \frac{x(\cos m + \cot A \cdot \sin m)}{\sin n}.$$

Wenn man nun in dieser letzten Gleichung den Wert von $\cot A$ einträgt, so ergibt sich nach mehrfachen Reduktionen die quadratische Gleichung

$$x^2 + (d + e)x = \frac{de \cdot \sin B \cdot \sin n}{\sin m \cdot \sin o},$$

aus welcher x leicht gefunden werden kann.

- 95) Von den drei Winkelpunkten eines vollständig gegebenen Dreiecks Fig. 14 ABC sind nach einem vierten Punkt D gerade Linien gezogen. Man kennt die Winkel an diesem Punkt und soll seine Entfernung von den Winkelpunkten des Dreiecks berechnen. (Die Pothenotsche Aufgabe.)

Auflösung. Drückt man BD aus den Dreiecken ABD und BDC mittelst des Sinussatzes aus und erwägt, daß

$$\angle ABC + \alpha + \beta + BAD + BCD = 4R \text{ ist: so ergibt sich}$$

$$\frac{c \cdot \sin BAD}{\sin \alpha} = \frac{a \cdot \sin (4R - ABC - \alpha - \beta - BAD)}{\sin \beta}$$

oder, wenn man $4R - ABC - \alpha - \beta = \Sigma$ setzt,

$$\frac{c \cdot \sin BAD}{\sin \alpha} = \frac{a \cdot \sin (\Sigma - BAD)}{\sin \beta}.$$

zerlegt man nun $\sin(\Sigma - BAD)$ nach 10 und dividiert die Gleichung durch $\sin BAD \cdot \sin \Sigma$, so erhält man

$$\cot BAD = \cot \Sigma + \frac{c \cdot \sin \beta}{a \cdot \sin \alpha \cdot \sin \Sigma},$$

demnach auch AD, BD und DC.

Anmerkung. Die Aufgabe ist unlösbar, $\angle BAD$ nämlich ganz unbestimmt, wenn Punkt D zufälliger Weise in der Peripherie des um $\triangle ABC$ beschriebenen Kreises liegt. Dann ist nämlich $\angle ABC + \alpha + \beta = 2R$, demnach auch $\Sigma = 2R$ und $\cot BAD = \pm \infty \pm \infty$.

3. Aufgaben ohne Lösung.

- 96) Einen Winkel zu finden, dessen Sinus zur Tangente, Cotangente oder zum Cosinus des Winkels in einem gegebenen Verhältnisse steht.
- 97) Einen Winkel zu finden, dessen Sinus mit dem Cosinus des Winkels die Summe m oder die Differenz n giebt
- 98) Einen Winkel zu finden, dessen Tangente und Cotangente die Summe m oder die Differenz n ergeben.
- 99) Einen Winkel zu finden, dessen Cosinus zum Cosinus oder Sinus des halben Winkels, oder dessen Sinus zum Sinus oder zur Tangente des doppelten Winkels, oder zur Tangente des halben Winkels in einem gegebenen Verhältnisse steht.
- 100) Einen Winkel zu finden, dessen Sinus zum Sinus des doppelten Winkels addiert die Tangente des ersten Winkels hervorbringt.
- 101) Einen Winkel zu finden, dessen Cosinus zum Cosinus des doppelten Winkels addiert einer gegebenen Zahl gleich wird.
- 102) Einen Winkel zu finden, dessen Sinus zum Sinus des dreifachen Winkels, oder dessen Cosinus zum Cosinus des dreifachen Winkels, oder dessen Tangente zur Tangente des dreifachen Winkels addiert, eine gegebene Zahl hervorbringt.
(Es ergeben sich kubische Gleichungen.)
- 103) Zwei Winkel zu finden, deren Sinus und Cosinus in bekannten Verhältnissen stehen.
- 104) Aus der Summe oder der Differenz der Sinus zweier Winkel und der Summe oder der Differenz ihrer Cosinus die Winkel zu berechnen.
- 105) In welchem Verhältnisse stehen die Umringe des regulären Achtecks und Fünfecks bei gleichem Flächeninhalt?
- 106) In welchem Verhältnisse stehen die Flächen jener Polygone bei gleichem Umring?
- 107) In welchem Verhältnisse steht der Umring eines regulären Sechsecks zu dem eines regulären Fünfecks, wenn der dem ersten umschriebene Kreis noch einmal so groß ist als der in das letztere einbeschriebene?
- 108) In welchem Verhältnisse steht der Umring des in ein reguläres Beineck einbeschriebenen Kreises zum Umring des in ein reguläres Siebeneck beschriebenen Kreises, wenn die beiden Polygone denselben Flächeninhalt haben?
- 109) Ein reguläres Zwanzigseit zu berechnen, das ein reguläres Zwölfeck von gleichem Umfang um eine gegebene Größe übertrifft.
- 110) Ein reguläres Fünfeck aus der Breite des Ringes zu berechnen, welcher vom umschriebenen und vom einbeschriebenen Kreise gebildet wird.
- 111) Wie groß ist der Fehler, welchen man begeht, wenn man die Entfernung des Kreismittelpunktes von der Seite des einbeschrie-

- benen regulären Sechsecks als Seite des einzubeschreibenden regulären Siebenecks annimmt?
- 112) Welchen Fehler begeht man, wenn man in dem Mittelpunkt eines Kreisdurchmessers eine dem Durchmesser gleiche Senkrechte errichtet, ihren Endpunkt mit dem einen Endpunkt des Durchmessers verbindet und die dadurch entstehende Sehne als Seite des regulären Siebenecks annimmt?
- 113) Aus dem Segment eines Kreises und dem zu ihm gehörigen Centriwinkel die Sehne und den Bogen des Segments zu berechnen.
- 114) Die Seiten und den Flächeninhalt eines in einen Kreis einbeschriebenen Viersecks zu berechnen, wenn der Radius des Kreises und das Verhältniß der zu den Seiten gehörenden Bogen gegeben ist.
- 115) Den Radius eines Kreises zu finden, in welchem zu einem gegebenen Centriwinkel eine ebenso große Sehne gehört, als in einem andern gegebenen Kreise zu einem ebenfalls gegebenen Centriwinkel.
- 116) Aus einer Seite eines Dreiecks, dem Verhältniß der beiden andern und dem Gegenwinkel der ersten Seite das Übrige zu finden.
- 117) Ein Dreieck aufzulösen, wenn die Höhe auf eine Seite, diese Seite selbst und das Verhältniß der beiden andern Seiten gegeben ist.
- 118) Ein Dreieck aufzulösen, wenn das Verhältniß zweier Seiten, der von ihnen eingeschlossene Winkel und die aus ihm gefällte Höhe gegeben ist.
- 119) Aus dem Flächeninhalte eines Dreiecks, dem einen Winkel und dem Verhältniß der auf die einschließenden Seiten gefällten Höhen das Übrige zu berechnen.
- 120) Ein Dreieck aufzulösen, wenn ein Winkel, die Summe der ihn einschließenden Seiten und die Summe der Quadrate dieser Seiten gegeben ist.
- 121) Aus der Summe (oder der Differenz) zweier Seiten, dem eingeschlossenen Winkel und der Differenz (oder der Summe) der auf die Seiten gefällten Höhen das Übrige zu berechnen.
- 122) Aus einem Winkel eines Dreiecks, seiner Gegenseite und der Summe der auf die beiden andern Seiten gefällten Höhen das Übrige zu berechnen.
- 123) Ein Dreieck aufzulösen, wenn die Differenz zweier Seiten, der Gegenwinkel der größern und die Entfernung der kleinern vom Mittelpunkt des umschriebenen Kreises gegeben ist.
- 124) Aus zwei Seiten eines Dreiecks und einem der Winkel, welche die dritte Seite mit der nach ihr gezogenen Transversale bildet, das Übrige zu finden.
- 125) Aus einem Winkel eines Dreiecks, der Transversale nach der Gegenseite und einem der Winkel, welche die Seite mit der Transversale bildet, das Übrige zu finden.
- 126) Den Flächeninhalt eines geraden Trapezes zu berechnen, von

welchem die größere Grundlinie, die anstoßende (schräge) Seite und der von beiden eingeschlossene Winkel gegeben ist.

- 127) Aus dem Flächeninhalte eines geraden Trapezes, einem seiner Winkel und der einen Grundlinie oder der schrägen Seite das Übrige zu finden.
- 128) Aus dem Flächeninhalte irgend eines Trapezes, den beiden nicht parallelen Seiten und dem von der kleinern dieser beiden Seiten und der größeren Grundlinie eingeschlossenen Winkel das Übrige zu berechnen.
- 129) Aus der kleinern Grundlinie eines Trapezes, den beiden nicht parallelen Seiten und der Differenz zweier Gegenwinkel den Flächeninhalt des Trapezes zu berechnen.
- 130) Aus dem Flächeninhalte eines Trapezes, den beiden nicht parallelen Seiten und der Summe zweier Gegenwinkel, von denen der größere an der kleinern schrägen Seite liegt, die Grundlinien zu finden.

Schlußbemerkung. Will man die durch trigonometrische Lösung einer Aufgabe gefundenen Ausdrücke konstruieren (vergl. „Planimetrie“ §167), so hat man auf die nachfolgenden Grundformeln zurückzugehen:

$x = a \cdot \sin \alpha$ ist die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem a die Hypotenuse und α der der Kathete gegenüber liegende Winkel ist.

$x = a \cdot \cos \alpha$ ist die Kathete eines Dreiecks, in welchem a die Hypotenuse und α der der Kathete anliegende Winkel ist.

$x = a \cdot \tan \alpha$ ist die Kathete eines Dreiecks, in welchem a die andere Kathete und α der der letztern anliegende Winkel ist.

$x = a \cdot \cot \alpha$ ist die Kathete eines Dreiecks, in welchem a die andere Kathete und α der ihr gegenüber liegende Winkel ist.

$x = \frac{a}{\sin \alpha}$ oder $\frac{a}{\cos \beta}$ ist die Hypotenuse eines Dreiecks, in welchem a die eine Kathete und $\angle \alpha$ der ihr gegenüber liegende, β der ihr anliegende Winkel ist.

In gleicher Weise können auch die vier ersten Formeln in § 19, bezgleichen die übrigen für rechtwinklige, gleichschenklige und ungleichseitig-schiefwinklige Dreiecke entwickelten Formeln für Konstruktionen benutzt werden,

$$\text{z. B. } \frac{a \cdot \sin \alpha}{\sin \beta},$$

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}{\sin \gamma}, \text{ wenn } \alpha + \beta + \gamma = 2R \text{ ist, u. s. w.}$$

Sphärische Trigonometrie.

§ 1.

Erklärung. Die sphärische Trigonometrie ist ein Theil der Stereometrie; sie hat zur Aufgabe: die zwischen den Seiten und Winkeln der sphärischen Dreiecke (s. Stereom. § 48 u. folg.) bestehenden Relationen mit Hilfe der Goniometrie aufzusuchen und schließlich diese Dreiecke aufzulösen, d. h. aus ihren bestimmenden Stücken (Seiten und Winkeln) die übrigen durch Rechnung zu finden.

Anmerkung. Es kommen nur diejenigen sphärischen Dreiecke in Betracht, in welchen alle Seiten und Winkel $< 180^\circ$ sind, weil die andern Kugeldreiecke sich leicht auf jene zurückführen lassen.

1. Die rechtwinkligen sphärischen Dreiecke.

§ 2.

Erklärung. Unter einem rechtwinkligen sphärischen Dreieck versteht man dasjenige, welches einen rechten Winkel enthält. Die den rechten Winkel einschließenden Seiten nennt man die Katheten, die ihm gegenüber liegende die Hypotenuse. Man bezeichnet diese Stücke wie bei den ebenen rechtwinkligen Dreiecken (s. Ebene Trigon. § 19).

Anmerkung. Wenn in einem Kugeldreieck alle Winkel rechte sind, so sind seine Seiten Quadranten (90°). Sind zwei Winkel rechte, so sind ihre beiden Gegenseiten Quadranten, und die dritte ist gleich dem dritten Winkel. Bei beiden Dreiecksarten bleibt also in betreff der Seiten und Winkel nichts zu untersuchen übrig.

§ 3.

Lehrsatz. In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke ist der Cosinus der Hypotenuse gleich dem Produkte der Cosinus der beiden Katheten.

Fig. 15. Voraussetzung. $\angle ACB$ ein rechter.

Behauptung. $\cos c = \cos a \cdot \cos b$.

Beweis. Zieht man nach den Winkelpunkten des Dreiecks ABC die Kugelradien MA , MB und MC , fällt dann aus B auf MA die Senkrechte BE und auf MC die Senkrechte BD , welche (nach Stereom. § 14, Zus. 1) $\perp CMA$ ist, so ist (nach Stereom. § 15, 2) $DE \perp AM$.

$$\begin{aligned} \text{Nun ist } \cos BME, \text{ d. i. } \cos c &= \frac{EM}{BM} = \frac{DM \cdot \cos b}{BM} \\ &= \frac{BM \cdot \cos a \cdot \cos b}{BM} = \cos a \cdot \cos b. \end{aligned}$$

$$\text{Folgerung 1. } \cos a = \frac{\cos c}{\cos b} \text{ und } \cos b = \frac{\cos c}{\cos a}.$$

Folgerung 2. Im rechtwinkligen Kugeldreieck ist entweder jede Seite kleiner als ein Quadrant (90°), oder nur eine; die beiden andern sind alsdann entweder größer als Quadranten — dies ergibt sich aus den Vorzeichen — oder beide gleich Quadranten.

Ist nämlich eine der Katheten ein Quadrant, so muß es auch die Hypotenuse sein — und umgekehrt; das Dreieck ist also gleichschenkelig und hat zwei rechte Winkel.

Natürlich können auch alle Seiten Quadranten sein; dann sind alle Winkel rechte.

§ 4.

Lehrsatz. In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ist der Sinus irgend eines schiefen Winkels gleich dem Sinus der ihm gegenüber liegenden Kathete, dividiert durch den Sinus der Hypotenuse.

Fig. 15. Behauptung. $\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}$ und $\sin B = \frac{\sin b}{\sin c}$.

Beweis. Nach Konstruktion ist $\angle BED$ der Neigungswinkel von AMB und AMC , demnach $= \angle A$.

Es ist aber $\sin BED$, d. i. $\sin A = \frac{BD}{BE}$,
ferner $BD = BM \cdot \sin a$ und $BE = BM \cdot \sin c$,

$$\text{folglich } \sin A = \frac{BM \cdot \sin a}{BM \cdot \sin c} = \frac{\sin a}{\sin c}.$$

Ebenso ergibt sich $\sin B = \frac{\sin b}{\sin c}$.

Folgerungen. 1) $\sin a = \sin c \cdot \sin A$
und $\sin b = \sin c \cdot \sin B$.

$$2) \sin c = \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}.$$

In Worten?

§ 5.

Lehrsatz. In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ist der Cosinus irgend eines schiefen Winkels gleich der Tangente der anliegenden Kathete, dividirt durch die Tangente der Hypotenuse.

Behauptung. $\cos A = \frac{\tan b}{\tan c}$ und $\cos B = \frac{\tan a}{\tan c}$. Fig. 15.

Beweis. Im Dreieck BDE ist $\cos BED$, d. i. $\cos A = \frac{DE}{BE}$; da nun in dem bei E rechtwinkligen Dreieck DEM Seite $DE = EM \cdot \tan b$ und $BE = EM \cdot \tan c$ ist,

so folgt $\cos A = \frac{EM \cdot \tan b}{EM \cdot \tan c} = \frac{\tan b}{\tan c}$

und dem analog $\cos B = \frac{\tan a}{\tan c}$.

Folgerungen. $\left. \begin{array}{l} 1) \tan a = \tan c \cdot \cos B \\ \text{und } \tan b = \tan c \cdot \cos A. \\ 2) \tan c = \frac{\tan a}{\cos B} = \frac{\tan b}{\cos A}. \end{array} \right\} \text{In Worten?}$

Die Tangenten der Katheten verhalten sich also umgekehrt wie die Cosinus ihrer Gegenwinkel.

§ 6.

Aus den voranstehenden drei Fundamentalsätzen ergeben sich noch folgende drei wichtige Relationen:

Lehrsatz. In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ist die Tangente irgend eines schiefen Winkels gleich der Tangente der gegenüber liegenden Kathete, dividirt durch den Sinus der anliegenden.

Behauptung. $\tan A = \frac{\tan a}{\sin b}$ und $\tan B = \frac{\tan b}{\sin a}$.

Beweis. $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$, d. i. $= \frac{\sin a}{\sin c} \cdot \frac{\tan c}{\tan b}$
 $= \frac{\sin a}{\cos c \cdot \tan b} = \frac{\sin a}{\cos a \cdot \cos b \cdot \tan b}$
 $= \frac{\tan a}{\sin b}$.

Folgerungen. $\left. \begin{array}{l} 1) \tan a = \sin b \cdot \tan A \\ \text{und } \tan b = \sin a \cdot \tan B. \\ 2) \sin a = \frac{\tan b}{\tan B} \text{ und } \sin b = \frac{\tan a}{\tan A}. \end{array} \right\} \text{In Worten?}$

Folgerung 3. In jedem rechtwinkligen Kugeldreieck sind Kathete und Gegenwinkel immer gleichartig, d. h. entweder beide $< 90^\circ$, oder beide $> 90^\circ$, oder beide $= 90^\circ$.

§ 7.

Lehrsatz. In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ist der Cosinus irgend einer Kathete gleich dem Cosinus des ihr gegenüber liegenden, dividiert durch den Sinus des anliegenden schiefen Winkels.

Behauptung. $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$ und $\cos b = \frac{\cos B}{\sin A}$.

Beweis. Dividiert man den Wert von $\cos A$ in § 5 durch den von $\sin B$ in § 4, so erhält man

$$\frac{\cos A}{\sin B} = \frac{\tan b}{\tan c} \cdot \frac{\sin c}{\sin b} = \frac{\cos c}{\cos b}, \text{ d. i. nach § 3} = \cos a^*).$$

Folgerungen. $\left. \begin{array}{l} 1) \cos A = \cos a \cdot \sin B \\ \text{und } \cos B = \cos b \cdot \sin A. \\ 2) \sin B = \frac{\cos A}{\cos a} \text{ und } \sin A = \frac{\cos B}{\cos b} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{In} \\ \text{Worten?} \end{array}$

§ 8.

Lehrsatz. In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ist der Cosinus der Hypotenuse gleich dem Produkte aus den Cotangenten der beiden schiefen Winkel.

Behauptung. $\cos c = \cot A \cdot \cot B$.

Beweis. Nach § 3 ist $\cos c = \cos a \cdot \cos b$,
also nach § 7 $= \frac{\cos A}{\sin B} \cdot \frac{\cos B}{\sin A}$
 $= \cot A \cdot \cot B$.

Folgerung. $\cot A = \frac{\cos c}{\cot B}$ oder $= \cos c \cdot \tan B$

und $\cot B = \frac{\cos c}{\cot A}$ oder $= \cos c \cdot \tan A$.

§ 9.

Man kann sich die entwickelten Gleichungen nach einer von Neper gefundenen Regel leicht merken.

Berücksichtigt man nämlich in Fig. 15, mit Weglassung des rechten Winkels, nur die fünf auf einander folgenden Stücke a, B, c, A und b , welche man sich in vorstehender Ordnung in Form eines Kreises zusammengestellt denken kann, so ist stets

der Cosinus irgend eines Stücks

*) Etwas künstlicher wird der Beweis, wenn man vom Subjekt des Satzes ($\cos a$) ausgeht.

- 1) gleich dem Produkte der Cotangenten der einschließenden Stücke
und
- 2) gleich dem Produkte der Sinus der ihm gegenüber liegenden Stücke.

Nur hat man bei den Katheten statt der Sinus die Cosinus, und statt der Cosinus und Cotangenten resp. die Sinus und Tangenten zu setzen.

Daß die erwiesenen Sätze zur Auflösung der rechtwinkligen Kugeldreiecke ausreichen und zur unmittelbaren Darstellung irgend eines Stücks durch zwei beliebige andere erforderlich sind, geht aus der nachfolgenden Zusammenstellung hervor:

Gegeben	Gesucht.
a und b	$\cos c = \cos a \cdot \cos b$, $\tan A = \frac{\tan a}{\sin b}$, $\tan B = \frac{\tan b}{\sin a}$,
a und c	$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}$, $\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}$, $\cos B = \frac{\tan a}{\tan c}$,
a und B	$\cos A = \cos a \cdot \sin B$, $\tan b = \sin a \cdot \tan B$, $\tan c = \frac{\tan a}{\cos B}$,
a und A	$\sin B = \frac{\cos A}{\cos a}$, $\sin b = \frac{\tan a}{\tan A}$, $\sin c = \frac{\sin a}{\sin A}$,
c und A	$\cot B = \cos c \cdot \tan A$, $\tan b = \tan c \cdot \cos A$, $\sin a = \sin c \cdot \sin A$,
A und B	$\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$, $\cos b = \frac{\cos B}{\sin A}$, $\cos c = \cot A \cdot \cot B$.

Erwägt man § 6, Folg. 3, so überzeugt man sich leicht, daß das Dreieck stets vollkommen bestimmt ist, ausgenommen den Fall, daß eine Kathete, z. B. a, und der ihr gegenüber liegende Winkel, A, gegeben sind. Dann wird nämlich jedes der übrigen Stücke durch seinen Sinus bestimmt, zu welchem eben sowohl ein stumpfer, als ein spitzer Winkel gehört. Hiernach könnte es scheinen, als seien 8 verschiedene Dreiecke möglich. Da aber b und B gleicher Art sein müssen und aus $\cos c = \cos a \cdot \cos b$ das Vorzeichen von cos c folgt, so reducirt sich die Zahl der möglichen verschiedenen Dreiecke auf 2 — wie auch aus der geometrischen Betrachtung dieses Falles hervorgeht.

Unmöglich wird das Dreieck, wenn $\sin a > \sin A$, also $\sin c > 1$ ist.

Ist dagegen $\sin a = \sin A < 1$, also (wegen § 6, Folg. 3) $a = A$, so ist das Dreieck bestimmt, nämlich ein doppelt-rechtwinkliges, wie aus den Gleichungen $\sin c = \frac{\sin a}{\sin A}$, $\sin b = \frac{\tan a}{\tan A}$ und $\sin B = \frac{\cos A}{\cos a}$ leicht zu ersehen.

In den besonderen Fällen endlich, daß $a = A = 90^\circ$ oder $c = A = 90^\circ$ oder $c = a = 90^\circ$ gegeben ist, ist das Dreieck völlig unbestimmt; es ergeben sich unendlich viel verschiedene doppelt-rechtwinklige

Dreiecke, da die Funktionen der übrigen Stücke entweder $= 0$ oder $= \infty$ werden. Dies erhellt auch aus § 3 Folg. 2 und § 6 Folg. 3; denn wenn von den 3 Stücken: Hypotenuse, eine Kathete und ihr Gegenwinkel eins $= 90^\circ$ ist, müssen es auch die beiden andern sein. Sie sind nicht von einander unabhängig.

Auf der Auflösung der rechtwinkligen Kugeldreiecke beruht die der gleichschenkligen, weil dieselben durch einen senkrechten Bogen in zwei symmetrische rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden können.

2. Die sphärischen Dreiecke im allgemeinen.

§ 10.

Lehrsatz. In jedem sphärischen Dreieck verhalten sich die Sinus der Seiten wie die Sinus ihrer Gegenwinkel.

Fig. 16,
a und b.

Behauptung. $\sin a : \sin b : \sin c = \sin A : \sin B : \sin C$.

Beweis. Legt man durch BM die Ebene BMD senkrecht auf AMC oder deren Erweiterung, so entstehen zwei bei D rechtwinklige Kugeldreiecke, ADB und CDB, und es ist nach § 4, Folg. 1

$$\sin BD = \sin a \cdot \sin BCD = \sin c \cdot \sin BAD,$$

$$\sin a : \sin c = \sin BAD : \sin BCD, \text{ d. i.} \\ = \sin A : \sin C,$$

es mag nun $\angle BAD$ *) ein Winkel des Dreiecks ABC oder dessen Nebenwinkel sein.

Auf dieselbe Weise ergeben sich die andern Proportionen.

§ 11.

Lehrsatz. In jedem sphärischen Dreieck ist der Cosinus irgend einer Seite gleich dem Produkte der Cosinus der beiden andern Seiten, vermehrt um das Produkt aus den Sinus dieser beiden Seiten und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Fig. 16,
a und b.

Behauptung. $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$,
desgl. $\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B$
und $\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C$.

Beweis. Bezeichnet man $\angle CBD$ mit X, $\angle ABD$ mit Y, CD mit u, DA mit v und BD mit w, so ist nach § 3

$$\cos a = \cos w \cdot \cos u = \cos w \cdot \cos (b \mp v) **) \\ = \cos w \cdot \cos b \cdot \cos v \pm \cos w \cdot \sin b \cdot \sin v,$$

*) In Fig. 16, c ist zwar $\angle BAD$ ein Winkel des Dreiecks ABC, nicht aber BCD, dieser also durch seinen Nebenwinkel zu ersetzen.

**) Die oberen Vorzeichen in diesen Gleichungen, so wie in denen des folgenden Paragraphen, beziehen sich auf Fig. a, die unteren auf Fig. b.

also, da $\cos w \cdot \cos v = \cos c$ und nach § 4, Folg. 1

$$\sin v = \sin c \cdot \sin Y \text{ ist,}$$

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c \pm \sin b \cdot \sin c \cdot \sin Y.$$

Nach § 7, Folg. 1 ist aber $\cos w \cdot \sin Y = \cos BAD$, d. i. $= \pm \cos A$, also $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$.

Fällt der Bogen BD so wie in Fig. 16, c — dies tritt ein, wenn Fig. 16, c $\angle BCA$ stumpf und BAC spitz ist oder v. v. — so hat man

$$\cos a = \cos w \cdot \cos u = \cos w \cdot \cos (v - b), \text{ also wie bei Fall 2}$$

$$= \cos w \cdot \cos v \cdot \cos b + \cos w \cdot \sin v \cdot \sin b$$

$$= \cos c \cdot \cos b + \cos w \cdot \sin b \cdot \sin c \cdot \sin Y$$

$$= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A.$$

In gleicher Weise ergeben sich die Ausdrücke für $\cos b$ und $\cos c$.

$$\text{Folgerung. } \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c},$$

$$\text{bezgl. } \cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c}$$

$$\text{und } \cos C = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}; \text{ d. h.:}$$

Man erhält den Cosinus irgend eines Winkels, wenn man von dem Cosinus seiner Gegenseite das Produkt der Cosinus der beiden einschließenden Seiten subtrahiert und den Rest durch das Produkt der Sinus dieser beiden Seiten dividiert.

§ 12.

Lehrsatz. In jedem sphärischen Dreieck ist der Cosinus irgend eines Winkels gleich dem negativen Produkte der Cosinus der beiden andern Winkel, vermehrt um das Produkt aus den Sinus dieser beiden Winkel und dem Cosinus der von ihnen eingeschlossenen Seite.

Behauptung. $\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a$, Fig. 16.

bezgl. $\cos B = -\cos A \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos b$ a und b.

und $\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos c$.

Beweis. $\cos C = \cos w \cdot \sin X = \cos w \cdot \sin (B \mp Y)$
 $= \cos w \cdot \sin B \cdot \cos Y \mp \cos w \cdot \sin Y \cdot \cos B,$

also, da $\cos Y = \cos v \cdot \sin BAD$, d. i. $= \cos v \cdot \sin A$

und $\cos w \cdot \sin Y = \cos BAD$, d. i. $= \pm \cos A$ ist,

$$\cos C = \cos w \cdot \cos v \cdot \sin A \cdot \sin B - \cos A \cdot \cos B$$

$$= \cos c \cdot \sin A \cdot \sin B - \cos A \cdot \cos B.$$

In Fig. 16, c ist $\cos BCD$, d. i. $-\cos C = \cos w \cdot \sin X = \cos w \cdot \sin (Y - B),$

$$\text{also } \cos C = \cos w \cdot \sin B \cdot \cos Y - \cos w \cdot \sin Y \cdot \cos B$$

$$= \cos w \cdot \cos v \cdot \sin A \cdot \sin B - \cos A \cdot \cos B$$

$$= \cos c \cdot \sin A \cdot \sin B - \cos A \cdot \cos B.$$

In derselben Weise gelangt man zu den beiden andern Gleichungen.

Anmerkung. Mittelfst des Polardreiecks folgt der Satz (nach Stereom. § 26, Folg. 3 und § 49, Folg. 2) auch unmittelbar aus § 11.

$$\text{Folgerung. } \cos a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C},$$

$$\text{bezgl. } \cos b = \frac{\cos B + \cos A \cdot \cos C}{\sin A \cdot \sin C}$$

$$\text{und } \cos c = \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}; \text{ d. h. :}$$

Man erhält den Cosinus irgend einer Seite, wenn man zu dem Cosinus ihres Gegenwinkels das Produkt der Cosinus der beiden andern Winkel addiert und die erhaltene Summe durch das Produkt der Sinus der beiden letzten Winkel dividiert.

§ 13.

Aus der in § 11 entwickelten Formel

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

ergiebt sich ein für logarithmische Berechnung geeigneterer Ausdruck von $\cos \frac{1}{2}A$. Es ist nämlich

$$\cos \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} = \sqrt{\frac{\sin b \cdot \sin c + \cos a - \cos b \cdot \cos c}{2 \sin b \cdot \sin c}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos a - \cos(b+c)}{2 \sin b \cdot \sin c}}, \text{ also nach „Ebene Trig.“ § 15}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \cdot \sin c}} \text{ oder,}$$

wenn man $a + b + c = s$,

demnach $b + c - a = s - 2a$ setzt,

$$\cos \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}s \cdot \sin(\frac{1}{2}s - a)}{\sin b \cdot \sin c}},$$

$$\text{bezgl. } \cos \frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}s \cdot \sin(\frac{1}{2}s - b)}{\sin a \cdot \sin c}}$$

$$\text{und } \cos \frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}s \cdot \sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin a \cdot \sin b}}.$$

In ähnlicher Weise erhält man

$$\sin \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+c-b) \cdot \sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin b \cdot \sin c}}, \text{ d. i.}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - b) \cdot \sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin b \cdot \sin c}}, \text{ folglich}$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2} s - b) \cdot \sin(\frac{1}{2} s - c)}{\sin \frac{1}{2} s \cdot \sin(\frac{1}{2} s - a)}} \text{ und}$$

$$\sin A = \frac{2}{\sin b \cdot \sin c} \sqrt{\sin \frac{1}{2} s \cdot \sin(\frac{1}{2} s - a) \cdot \sin(\frac{1}{2} s - b) \cdot \sin(\frac{1}{2} s - c)}$$

und ihnen analoge Ausdrücke für die beiden andern Winkel.

Anmerkung. Da immer nur von solchen Kugeldreiecken die Rede ist, in welchen alle Seiten und Winkel $< 180^\circ$ sind, die also zu einer konvergen Ecke gehören: so ist (nach Stereom. § 27, 2) $a + b + c$ immer $< 360^\circ$, demnach $\frac{1}{2} s < 180^\circ$, $\sin \frac{1}{2} s$ also positiv. Dasselbe gilt auch von den andern in den Formeln vorkommenden Sinus; ihre Winkel sind nämlich positiv, da (nach Stereom. § 27, 1) die Summe je zweier Seiten immer größer als die dritte ist. Die Radikanden der Wurzeln sind also sämtlich positiv.

§ 14.

Auf ähnliche Weise wird aus

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C},$$

wenn man $A + B + C = S$ setzt,

$$\cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos(\frac{1}{2} S - B) \cdot \cos(\frac{1}{2} S - C)}{\sin B \cdot \sin C}},$$

$$\sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2} S \cdot \cos(\frac{1}{2} S - A)}{\sin B \cdot \sin C}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2} S \cdot \cos(\frac{1}{2} S - A)}{\cos(\frac{1}{2} S - B) \cdot \cos(\frac{1}{2} S - C)}} \text{ und}$$

$$\sin a = \frac{2}{\sin B \cdot \sin C} \sqrt{-\cos \frac{1}{2} S \cdot \cos(\frac{1}{2} S - A) \cdot \cos(\frac{1}{2} S - B) \cdot \cos(\frac{1}{2} S - C)}.$$

Wie lauten die entsprechenden Formeln für die beiden andern Seiten?

Anmerkung. Da (nach Stereom. § 27, 3) $S > 180^\circ$ und $< 540^\circ$, $\frac{1}{2} S$ also $> 90^\circ$ und $< 270^\circ$ ist, muß $\cos \frac{1}{2} S$ eine negative, $-\cos \frac{1}{2} S$ also eine positive GröÙe sein. Die übrigen in den Formeln vorkommenden Cosinus sind positiv, d. h. die betreffenden Winkel spitz, z. B. $\frac{1}{2}(B + C - A)$; denn in dem zugehörigen Polar-dreieck, dessen Seiten β, γ, α sein mögen, ist $\alpha < \beta + \gamma$, d. i. (nach Stereom. § 26, Folg. 3)

$$180^\circ - A < 180^\circ - B + 180^\circ - C,$$

folglich $B + C - A < 180^\circ$ und $\frac{1}{2}(B + C - A) < 90^\circ$.

§ 15.

Trägt man die in § 13 gefundenen Werte von $\sin \frac{1}{2}A$, $\sin \frac{1}{2}B$, $\cos \frac{1}{2}A$ und $\cos \frac{1}{2}B$ in die Formel

$$\cos \frac{1}{2}(A \pm B) = \cos \frac{1}{2}A \cdot \cos \frac{1}{2}B \mp \sin \frac{1}{2}A \cdot \sin \frac{1}{2}B$$

ein: so erhält man, wenn man die Wurzeln mit einander multipliciert und möglichst von der Irrationalität befreit,

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2}(A \pm B) &= \frac{\sin \frac{1}{2}s}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - a) \cdot \sin(\frac{1}{2}s - b)}{\sin a \cdot \sin b}} \\ &\mp \frac{\sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - a) \cdot \sin(\frac{1}{2}s - b)}{\sin a \cdot \sin b}}, \text{ d. i.} \\ &= \frac{\sin \frac{1}{2}s \mp \sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - a) \cdot \sin(\frac{1}{2}s - b)}{\sin a \cdot \sin b}}, \end{aligned}$$

$$\text{also } \cos \frac{1}{2}(A + B) = \frac{\sin \frac{1}{2}c \cdot \cos \frac{1}{2}(s - c)}{\sin \frac{1}{2}c \cdot \cos \frac{1}{2}c} \cdot \sin \frac{1}{2}C$$

$$\text{und } \cos \frac{1}{2}(A - B) = \frac{\sin \frac{1}{2}(s - c) \cdot \cos \frac{1}{2}c}{\sin \frac{1}{2}c \cdot \cos \frac{1}{2}c} \cdot \sin \frac{1}{2}C,$$

$$\begin{aligned} \text{demnach } \cos \frac{1}{2}(A + B) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(a + b)}{\cos \frac{1}{2}c} \cdot \sin \frac{1}{2}C \\ \text{und } \cos \frac{1}{2}(A - B) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(a + b)}{\sin \frac{1}{2}c} \cdot \sin \frac{1}{2}C. \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \cos \frac{1}{2}(A + B) \\ \cos \frac{1}{2}(A - B) \end{aligned}} \right\} G$$

Verfährt man in derselben Weise mit der Formel

$$\sin \frac{1}{2}(A \pm B) = \sin \frac{1}{2}A \cdot \cos \frac{1}{2}B \pm \sin \frac{1}{2}B \cdot \cos \frac{1}{2}A,$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}(A \pm B) &= \frac{\sin(\frac{1}{2}s - b)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}s \cdot \sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin a \cdot \sin b}} \\ &\pm \frac{\sin(\frac{1}{2}s - a)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}s \cdot \sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin a \cdot \sin b}}, \end{aligned}$$

$$\text{folglich } \sin \frac{1}{2}(A + B) = \frac{\sin \frac{1}{2}(s - a - b) \cdot \cos \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}c \cdot \cos \frac{1}{2}c} \cdot \cos \frac{1}{2}C$$

$$\text{und } \sin \frac{1}{2}(A - B) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b) \cdot \cos \frac{1}{2}(s - a - b)}{\sin \frac{1}{2}c \cdot \cos \frac{1}{2}c} \cdot \cos \frac{1}{2}C,$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } \sin \frac{1}{2}(A + B) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}c} \cdot \cos \frac{1}{2}C \\ \text{und } \sin \frac{1}{2}(A - B) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}c} \cdot \cos \frac{1}{2}C. \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}(A + B) \\ \sin \frac{1}{2}(A - B) \end{aligned}} \right\} G,$$

Beseitigt man in den Formeln G und G, die Nenner, so erhält man die Gauß'schen*) oder Delambreschen Gleichungen:

$$\cos \frac{1}{2}(A + B) \cdot \cos \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}(a + b) \cdot \sin \frac{1}{2}C,$$

$$\cos \frac{1}{2}(A - B) \cdot \sin \frac{1}{2}c = \sin \frac{1}{2}(a + b) \cdot \sin \frac{1}{2}C,$$

$$\sin \frac{1}{2}(A + B) \cdot \cos \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}(a - b) \cdot \cos \frac{1}{2}C,$$

$$\sin \frac{1}{2}(A - B) \cdot \sin \frac{1}{2}c = \sin \frac{1}{2}(a - b) \cdot \cos \frac{1}{2}C.$$

Dividirt man mit der ersten in die dritte und mit der zweiten in die vierte, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A + B) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b)} \cdot \cot \frac{1}{2}C \\ \text{und } \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A - B) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)} \cdot \cot \frac{1}{2}C. \end{aligned} \right\} N$$

Dividirt man dagegen mit der ersten in die zweite und mit der dritten in die vierte, so hat man

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tang} \frac{1}{2}(a + b) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2}(A + B)} \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2}c \\ \text{und } \operatorname{tang} \frac{1}{2}(a - b) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(A - B)}{\sin \frac{1}{2}(A + B)} \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2}c. \end{aligned} \right\} N,$$

Die vier letzten Gleichungen (N und N,) — zu denen man ebenso, wie zu den Gauß'schen, auch gelangt, wenn man die Werte von $\sin \frac{1}{2}a$, $\sin \frac{1}{2}b$, $\cos \frac{1}{2}a$, $\cos \frac{1}{2}b$ in die Ausdrücke für $\sin \frac{1}{2}(a \pm b)$ und $\cos \frac{1}{2}(a \pm b)$ einträgt und in derselben Weise wie vorher verfährt — sind unter dem Namen der Neper'schen Analogieen bekannt. Sie stellen eine Relation zwischen je fünf Stücken eines Kugeldreiecks auf, während die Gauß'schen Gleichungen alle sechs Stücke zugleich enthalten.

Wie lauten die Gauß'schen und die Neper'schen Gleichungen für die andern Winkel und Seiten, welche eine gleiche gegenseitige Lage haben?

Anmerkung. Es ist leicht zu sehen, daß die Neper'schen Analogieen, sowohl N, als N,, zugleich einen dem Tangentialsatz (Ebene Trigonometrie. § 23, Lehrf. 2) analogen Satz enthalten, nämlich die auch aus § 10 sich ergebende Proportion

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a + b) : \operatorname{tang} \frac{1}{2}(a - b) = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A + B) : \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A - B).$$

*) Eigentlich sollten sie die Mollweideschen heißen, weil Mollweide sie vor Gauß veröffentlicht und bewiesen hat.

§ 16.

A u f g a b e n.

1) Aus den drei Seiten eines sphärischen Dreiecks die Winkel zu finden.

Die Auflösung geschieht mittelst der Formeln in § 13.

2) Aus den drei Winkeln eines sphärischen Dreiecks die Seiten zu berechnen.

Man findet sie mittelst der Formeln in § 14.

3) Aus zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel die übrigen Stücke des Dreiecks zu berechnen.

Man findet zunächst mittelst der Neper'schen Analogieen N in § 15 die halbe Summe und die halbe Differenz der beiden andern Winkel, demnach diese Winkel selbst.

Die dritte Seite ergibt sich darauf am besten aus einer der Formeln in § 14, oder aus einer der Gauß'schen oder der Neper'schen (N,) Gleichungen.

Anmerkung. Man kann die dritte Seite (es sei c) auch unmittelbar, nämlich aus der in § 11 entwickelten Gleichung

$$\begin{aligned}\cos c &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C \\ \text{oder } \cos c &= \cos a (\cos b + \tan a \cdot \sin b \cdot \cos C)\end{aligned}$$

berechnen, welche sich durch Einführung eines Hilfswinkels φ für logarithmische Berechnung bequemer einrichten läßt. Setzt man nämlich

$$\tan a \cdot \cos C = \tan \varphi,$$

was immer möglich ist, so wird aus jener Gleichung die folgende:

$$\begin{aligned}\cos c &= \cos a (\cos b + \sin b \cdot \tan \varphi) \\ &= \cos a \left(\cos b + \frac{\sin b \cdot \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) \\ &= \frac{\cos a \cdot \cos(b - \varphi)}{\cos \varphi}.\end{aligned}$$

4) Aus zwei Winkeln eines sphärischen Dreiecks und der zwischen ihnen liegenden Seite die übrigen Stücke zu berechnen.

Man findet zunächst die beiden andern Seiten mittelst der Neper'schen Analogieen N, in § 15, nachher den dritten Winkel aus einer der Formeln in § 13, oder aus einer der Gauß'schen oder der Neper'schen (N) Gleichungen, oder auch gleich anfangs aus § 12 mittelst eines Hilfswinkels, wie in der Anmerk. zu Aufg. 3.

5) Aus zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks (a und b) und dem einen ihrer Gegenwinkel (A) die übrigen Stücke zu berechnen.

Man berechne zunächst den andern Gegenwinkel (B) mittelst § 10, nachher den dritten Winkel (C) aus einer der Gleichungen N in § 15, nach welcher z. B. $\cot \frac{1}{2}C = \frac{\tan \frac{1}{2}(A+B) \cdot \cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}(a-b)}$, endlich die dritte Seite aus § 14 oder aus einer der Gleichungen N, in § 15, nach welcher z. B. $\tan \frac{1}{2}c = \frac{\tan \frac{1}{2}(a+b) \cdot \cos \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(A-B)}$ ist.

Da in dieser Aufgabe $\angle B$, der immer zunächst gefunden werden muß, nur durch seinen Sinus bestimmt wird, so ist das Dreieck aus folgenden Gründen in zwei Fällen biform, in den übrigen bestimmt:

Zuvörderst ergibt sich aus der letzten Gauß'schen Gleichung, daß

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\sin \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}C} \text{ ist.}$$

Da nun alle Seiten und Winkel $< 180^\circ$ angenommen werden, so sind $\sin \frac{1}{2}c$ und $\cos \frac{1}{2}C$ positive Größen, folglich $\sin \frac{1}{2}(a-b)$ und $\sin \frac{1}{2}(A-B)$ gleichstimmig, d. h. beide zugleich entweder positiv oder negativ. Dies gilt auch, da $\sin(\pm \varphi) = \pm \sin \varphi$ ist, für ihre Winkel. Wenn demnach

$$\frac{a > b}{a < b} \text{ ist, so ist auch } \frac{A > B}{A < B} \text{ und umgekehrt.}$$

Daß gleichen Seiten gleiche Winkel — und vice versa — gegenüber liegen, ist schon in Stereom. § 29, Lehrsatz 1 und 2 erwiesen, folgt übrigens ebenfalls aus obiger Gleichung.

Ferner ist aus der Gleichung N:

$$\tan \frac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \cdot \cot \frac{1}{2}C,$$

da $\cos \frac{1}{2}(a-b)$ und $\cot \frac{1}{2}C$ positiv sein müssen, ersichtlich, daß $\tan \frac{1}{2}(A+B)$ und $\cos \frac{1}{2}(a+b)$ stets gleichstimmig sind.

Wenn also $\frac{1}{2}(a+b) \geq 90^\circ$, so ist auch $\frac{1}{2}(A+B) \geq 90^\circ$, und ist $\frac{1}{2}(a+b) = 90^\circ$, so ist auch $\frac{1}{2}(A+B) = 90^\circ$.

Wenn demnach $a+b \geq 180^\circ$, so ist auch $A+B \geq 180^\circ$ — und umgekehrt.

Hiernach ergeben sich drei Fälle:

$$1) a+b < 180^\circ, \text{ demnach auch } A+B < 180^\circ.$$

Wodann kann $a \geq b$ sein.

Ist $a \geq b$, demnach auch $A \geq B$, so muß $B < 90^\circ$ sein.

Ist $a < b$, demnach auch $A < B$ und $A < 90^\circ$, so kann $B \geq 90^\circ$ sein, und man darf eben sowohl den aus den Logarithmentafeln sich ergebenden spitzen Winkel, als sein Supplement nehmen, weil nämlich auch der spitze Winkel größer als A ausfallen muß.

2) $a + b = 180^\circ$, mithin auch $A + B = 180^\circ$.

Dann muß, je nachdem $a \geq b$, demnach auch $A \geq B$ ist, $B \leq 90^\circ$ sein.

Da unter der Voraussetzung $a = b = 90^\circ$ auch $A = B = 90^\circ$ sein muß, hat man in diesem speciellen Falle nur 2 von einander unabhängige Stücke, und das Dreieck ist völlig unbestimmt. cf. § 9 extr.

3) $a + b > 180^\circ$, mithin auch $A + B > 180^\circ$.

Dann wird, wenn $a > b$, folglich auch $A > B$ und $A > 90^\circ$ ist, $B \geq 90^\circ$ sein können, und man darf außer dem spitzen Winkel auch sein Supplement nehmen, weil auch letzteres noch kleiner als A ausfällt.

Ist dagegen $a < b$, demnach auch $A < B$, so muß $B > 90^\circ$ sein.

Das Dreieck ist also unbestimmt,

1) wenn $a + b < 180^\circ$ und $a < b$,

2) wenn $a + b > 180^\circ$ und $a > b$ ist.

Vorausgesetzt wurde in der voranstehenden Erörterung, daß $\sin B$ eine mögliche Größe, d. h. daß $\sin B = \frac{\sin b \cdot \sin A}{\sin a} < 1$ ist. Denn wenn $\sin B > 1$ wird, so ist das Dreieck unmöglich. Dies kann eintreten, wenn $a + b < 180^\circ$ und $a < b$, oder wenn $a + b > 180^\circ$ und $a > b$ ist, also in den beiden Fällen, wo das Dreieck unbestimmt ist.

6) Aus zwei Winkeln eines sphärischen Dreiecks (A und B) und der einen Gegenseite (a) die übrigen Stücke zu berechnen.

Man findet zunächst die andere Gegenseite (b) mittelst § 10; dann verfährt man wie in der fünften Aufgabe.

Wegen der Zweideutigkeit der Seite b sind dieselben Betrachtungen anzustellen wie in voriger Aufgabe; sie führen zu dem ähnlichen Resultate, daß das Dreieck bisform ist,

1) wenn $A + B < 180^\circ$ und $A < B$,

2) wenn $A + B > 180^\circ$ und $A > B$ ist.

§ 17.

3. Berechnung des Flächeninhaltes sphärischer Dreiecke.

Nach Stereom. § 66, 3 ist der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks

$$= \frac{(A + B + C - 180^\circ) R^2 \pi}{180^\circ}.$$

Man würde also, wenn nicht die Winkel, sondern andere Bestimmungsstücke des sphärischen Dreiecks gegeben sind, erst die Winkel einzeln berechnen müssen. Besser ist es jedoch, den sphärischen Exceß: $A + B + C - 180^\circ$, von dessen Größe der Flächeninhalt abhängt, unmittelbar durch die gegebenen Stücke auszudrücken. Dies kann in zwei Fällen geschehen:

1) wenn die drei Seiten gegeben sind.

Dann setze man $A + B + C - 180^\circ = E$,

$$\frac{1}{2}E = \frac{1}{2}(A + B + C) - 90^\circ$$

$$\text{und } \sin \frac{1}{2}E = -\cos \frac{1}{2}(A + B + C) = -\cos [\frac{1}{2}(A + B) + \frac{1}{2}C] \\ = -\cos \frac{1}{2}(A + B) \cdot \cos \frac{1}{2}C + \sin \frac{1}{2}(A + B) \cdot \sin \frac{1}{2}C.$$

Trägt man nun die Gauß'schen Werte von $\cos \frac{1}{2}(A + B)$ und $\sin \frac{1}{2}(A + B)$ ein, so erhält man

$$\sin \frac{1}{2}E = -\frac{\cos \frac{1}{2}(a + b) \cdot \sin C}{2 \cos \frac{1}{2}c} + \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b) \cdot \sin C}{2 \cos \frac{1}{2}c} \\ = \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b) - \cos \frac{1}{2}(a + b)}{2 \cos \frac{1}{2}c} \cdot \sin C, \text{ d. i.} \\ = \frac{\sin \frac{1}{2}a \cdot \sin \frac{1}{2}b}{\cos \frac{1}{2}c} \cdot \sin C \text{ oder, nach § 13,}$$

wenn man $\sin a = 2 \sin \frac{1}{2}a \cdot \cos \frac{1}{2}a$

und $\sin b = 2 \sin \frac{1}{2}b \cdot \cos \frac{1}{2}b$ setzt,

$$\sin \frac{1}{2}E = \frac{\sqrt{\sin \frac{1}{2}s \cdot \sin(\frac{1}{2}s - a) \cdot \sin(\frac{1}{2}s - b) \cdot \sin(\frac{1}{2}s - c)}}{2 \cos \frac{1}{2}a \cdot \cos \frac{1}{2}b \cdot \cos \frac{1}{2}c}.$$

Eine noch elegantere Formel hat Simon D'Huilier, und zwar für $\tan \frac{1}{4}E$ gefunden.

Da nämlich $E = A + B - (180^\circ - C)$,

$$\text{also } \frac{1}{4}E = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(A + B) - \frac{1}{2}(180^\circ - C)]$$

und nach Nr. 36 in dem Anhang zur ebenen Trigonometrie

$$\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} \text{ ist:}$$

so wird, wenn man für α setzt $\frac{1}{2}(A + B)$

und für β $\frac{1}{2}(180^\circ - C)$, d. i. $90^\circ - \frac{1}{2}C$,

$$\tan \frac{1}{4}E = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + B) - \sin(90^\circ - \frac{1}{2}C)}{\cos \frac{1}{2}(A + B) + \cos(90^\circ - \frac{1}{2}C)} \\ = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + B) - \cos \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}(A + B) + \sin \frac{1}{2}C}$$

und mit Beziehung der Gauß'schen Gleichungen, wenn man Zähler und Nenner mit $\cos \frac{1}{2}c$ multipliciert,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tang} \frac{1}{4} E &= \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b) \cdot \cos \frac{1}{2} C - \cos \frac{1}{2} c \cdot \cos \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2}(a+b) \cdot \sin \frac{1}{2} C + \cos \frac{1}{2} c \cdot \sin \frac{1}{2} C} \\
 &= \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b) - \cos \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2}(a+b) + \cos \frac{1}{2} c} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} C} \\
 &= \frac{\sin \frac{1}{4}(a+c-b) \cdot \sin \frac{1}{4}(b+c-a)}{\cos \frac{1}{4}(a+b+c) \cdot \cos \frac{1}{4}(a+b-c)} \cdot \cot \frac{1}{2} C.
 \end{aligned}$$

Nun ist nach § 13

$$\cot \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin \frac{1}{2}(a+c-b) \cdot \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}}.$$

Trägt man diesen Wert ein, bringt dann den Coefficienten der Wurzel als Factor unter die Wurzel, ersetzt man endlich $\sin \frac{1}{2} w$ durch $2 \sin \frac{1}{4} w \cdot \cos \frac{1}{4} w$: so erhält man nach Aufhebung der gemeinschaftlichen Factoren im Zähler und Nenner

$$\operatorname{tang} \frac{1}{4} E = \sqrt{\operatorname{tang} \frac{1}{4}(a+b+c) \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{4}(a+b-c) \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{4}(a+c-b) \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{4}(b+c-a)}.$$

Setzt man endlich $\frac{1}{2}(a+b+c) = u$,

demnach $a+b+c = 2u$, $a+b-c = 2u-2c$ u. s. w., so erhält man

$$\operatorname{tang} \frac{1}{4} E = \sqrt{\operatorname{tang} \frac{1}{2} u \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2}(u-c) \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2}(u-b) \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2}(u-a)}.$$

2) Sind zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben, so entwickle man $\cos \frac{1}{2} E$ in derselben Weise wie $\sin \frac{1}{2} E$. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{1}{2} E &= \sin \frac{1}{2}(A+B+C) = \sin \left[\frac{1}{2}(A+B) + \frac{1}{2} C \right] \\
 &= \sin \frac{1}{2}(A+B) \cdot \cos \frac{1}{2} C + \sin \frac{1}{2} C \cdot \cos \frac{1}{2}(A+B) \\
 &= \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2} c} \cdot \cos \frac{1}{2} C + \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2} c} \cdot \sin \frac{1}{2} C \\
 &= \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2} c} \cdot \frac{1+\cos C}{2} + \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2} c} \cdot \frac{1-\cos C}{2} \\
 &= \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b) + \cos \frac{1}{2}(a+b) + [\cos \frac{1}{2}(a-b) - \cos \frac{1}{2}(a+b)] \cos C}{2 \cos \frac{1}{2} c} \\
 &= \frac{\cos \frac{1}{2} a \cdot \cos \frac{1}{2} b + \sin \frac{1}{2} a \cdot \sin \frac{1}{2} b \cdot \cos C}{\cos \frac{1}{2} c}.
 \end{aligned}$$

Dividirt man nun diese Gleichung in

$$\sin \frac{1}{2} E = \frac{\sin \frac{1}{2} a \cdot \sin \frac{1}{2} b \cdot \sin C}{\cos \frac{1}{2} c}, \text{ so erhält man}$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} E = \frac{\sin \frac{1}{2} a \cdot \sin \frac{1}{2} b \cdot \sin C}{\cos \frac{1}{2} a \cdot \cos \frac{1}{2} b + \sin \frac{1}{2} a \cdot \sin \frac{1}{2} b \cdot \cos C}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin C}{\cot \frac{1}{2}a \cdot \cot \frac{1}{2}b + \cos C} \text{ oder} \\
 &= \frac{\tan \frac{1}{2}a \cdot \tan \frac{1}{2}b \cdot \sin C}{1 + \tan \frac{1}{2}a \cdot \tan \frac{1}{2}b \cdot \cos C} \cdot *)
 \end{aligned}$$

Ändert man die letzte der beiden Formeln, welche für logarithmische Berechnung sich nicht sehr eignen, dadurch,

daß man für $\sin C$ $\cos C \cdot \tan C$ schreibt,

$$\text{in } \tan \frac{1}{2}E = \frac{\tan \frac{1}{2}a \cdot \tan \frac{1}{2}b \cdot \cos C}{1 + \tan \frac{1}{2}a \cdot \tan \frac{1}{2}b \cdot \cos C} \cdot \tan C$$

und führt man den Hilfswinkel φ ein,

$$\text{indem man } \tan \frac{1}{2}a \cdot \tan \frac{1}{2}b \cdot \cos C = \tan^2 \varphi,$$

$$\text{also } \tan \varphi = \sqrt{\tan \frac{1}{2}a \cdot \tan \frac{1}{2}b \cdot \cos C}$$

annimmt: so wird aus jener Formel

$$\begin{aligned}
 \tan \frac{1}{2}E &= \frac{\tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} \cdot \tan C, \text{ d. i.} \\
 &= \frac{\tan^2 \varphi}{\sec^2 \varphi} \cdot \tan C \\
 &= \tan^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi \cdot \tan C \\
 &= \sin^2 \varphi \cdot \tan C.
 \end{aligned}$$

Durch zwei Winkel und eine Seite, desgleichen durch zwei Seiten und den einen ihrer Gegenwinkel, läßt sich der sphärische Exceß in brauchbarer Weise nicht ausdrücken. Man muß also in beiden Fällen das zur Bestimmung desselben Fehlende einzeln berechnen.

*) Für das rechtwinklige Dreieck wird aus dieser Formel, wenn C der rechte Winkel ist,

$$\begin{aligned}
 \tan \frac{1}{2}E &= \tan \frac{1}{2}a \cdot \tan \frac{1}{2}b, \text{ demnach auch} \\
 &= \tan \frac{1}{2}a \cdot \sqrt{\tan \frac{1}{2}(c+a) \cdot \tan \frac{1}{2}(c-a)}.
 \end{aligned}$$

A n h a n g.

Ü b u n g s a u f g a b e n.

1) Den Neigungswinkel i der Grenzflächen eines regulären Tetraeders, eines regulären Oktaeders, eines regulären Dodekaeders und eines regulären Ikosaeders zu berechnen.

Auflösung. Beim regulären Tetraeder ist

$$\cos \frac{1}{2}i = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ oder } \cos i = \frac{1}{3},$$

demnach $i = 70^\circ 31' 43,6''$.

Beim regulären Oktaeder ist

$$\cos \frac{1}{2}i = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ oder } \cos i = -\frac{1}{3},$$

demnach $i = 109^\circ 28' 16,4''$.

Beim regulären Dodekaeder ist

$$\cos \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{\sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ}}{\sin 72^\circ} \text{ oder } \sin \frac{1}{2}i = \frac{\sin 54^\circ}{\sin 72^\circ},$$

demnach $i = 116^\circ 33' 54,12''$.

Beim regulären Ikosaeder ist

$$\cos \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{\sin 66^\circ \cdot \sin 6^\circ}}{\sin 60^\circ} \text{ oder } \sin \frac{1}{2}i = \frac{\sin 54^\circ}{\sin 60^\circ},$$

demnach $i = 138^\circ 11' 22,86''$.

Sämtliche Auflösungen sind leicht, wenn man beachtet, daß alle Sätze von den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks auch von den Seiten und Winkeln der zugehörigen Ecke gelten. Beim Oktaeder und Ikosaeder muß man auf dreiseitige Ecken zu kommen suchen.

2) Die Projektion eines gegebenen Winkels A auf eine gegen seine Ebene geneigte Ebene zu berechnen, wenn die Winkel gegeben sind, welche die Schenkel des Winkels mit der aus seinem Scheitel auf die Ebene gefällten Senkrechten bilden.

Auflösung. Die Schenkel des Winkels bilden mit der Senkrechten die Kanten einer dreiseitigen Ecke, deren Seiten die gegebenen Winkel

sind; ihre Projektionen aber bilden die verlangte Projektion und zugleich den Neigungswinkel der projicierenden Ebenen, also einen Winkel der dreiseitigen Ecke. Man hat demnach eine der Formeln in § 13 anzuwenden.

3) Aus den Seiten einer dreiseitigen Ecke die Neigungswinkel der Kanten gegen die Seiten zu finden.

Auflösung. Nach Stereom. § 13, Folg. 2 ist der Neigungswinkel Fig. 16. der BM gegen AMC der Winkel BMD, gemessen durch w .

Nun ist $\sin w = \sin c \cdot \sin A$, also

$$= \frac{2}{\sin b} \sqrt{\sin \frac{1}{2}s \cdot \sin(\frac{1}{2}s - a) \cdot \sin(\frac{1}{2}s - b) \cdot \sin(\frac{1}{2}s - c)}.$$

Anmerkung. Hieraus ergibt sich die Auflösung der im Anhang zur Stereometrie gestellten Aufgaben Nr. 119 — 122.

4) Aus den gegebenen Längen und Breiten zweier Punkte A und B auf der Erde: ihre Entfernung, d. h. den zwischen ihnen liegenden Bogen eines größten Kreises zu berechnen.

Auflösung. Bezeichnet man die Längen mit l und l , die Breiten mit b und b , die Entfernung von A und B mit d , so ergibt sich aus dem sphärischen Dreieck, dessen Winkelpunkte A und B und der eine Erdpol sind, $\cos d = \sin b \cdot \sin b + \cos b \cdot \cos b \cdot \cos(l - l)$.

Anmerkung. Zugleich ist ersichtlich, daß statt l und l , auch bloß $l - l$, gegeben zu sein braucht.

5) Den Sinussatz (§ 10) aus der in § 13 entwickelten Formel für den Sinus eines Winkels abzuleiten.

Auflösung. Bezeichnet man $\sqrt{\sin \frac{1}{2}s \cdot \sin(\frac{1}{2}s - a) \cdot \sin(\frac{1}{2}s - b) \cdot \sin(\frac{1}{2}s - c)}$ mit L , so braucht man nur L durch $\sin A$ und durch $\sin B$ oder $\sin C$ auszudrücken und die Werte gleich zu setzen.

Anmerkung. In derselben Weise ergibt sich der Sinussatz aus der in § 14 entwickelten Formel für den Sinus einer Seite, wenn man $\sqrt{\cos \frac{1}{2}S \cdot \cos(\frac{1}{2}S - A) \cdot \cos(\frac{1}{2}S - B) \cdot \cos(\frac{1}{2}S - C)}$ mit A setzt.

6) Zu beweisen, daß in jedem sphärischen Dreieck sich L zu A wie der Sinus irgend einer Seite zum Sinus ihres Gegenwinkels verhält.

Auflösung. Man dividire die Werte von L und A durch einander und berücksichtige nötigenfalls den Sinussatz.

7) Aus den Seiten des sphärischen Dreiecks den Bogen t eines größten Kreises zu berechnen, welcher von dem Winkelpunkt A nach der Mitte der Gegenseite gelegt ist.

Auflösung. Man stelle die Cosinus der beiden Winkel, welche die Transversale t mit a bildet, nach § 11, Folg. aus den beiden Dreiecken dar und kompariere die Werte, so erhält man

$$\cos t = \frac{\cos b + \cos c}{2 \cos \frac{1}{2}a} = \frac{\cos \frac{1}{2}(b+c) \cdot \cos \frac{1}{2}(b-c)}{\cos \frac{1}{2}a}.$$

Die Auflösung zeigt, daß die Aufgabe sich auch leicht umkehren, nämlich aus zwei Seiten und der Transversale nach der dritten diese letztere sich finden läßt.

8) Zu beweisen, daß in jedem sphärischen Dreieck sich die Sinus der Höhen umgekehrt wie die Sinus der Seiten verhalten, auf welche sie gefällt sind.

Der Beweis ergibt sich aus § 4.

Fig. 16, a. 9) Aus den Seiten eines sphärischen Dreiecks die Abschnitte u und v zu berechnen, in welche eine seiner Seiten b durch die aus dem Gegenwinkel gefällte Höhe w geteilt wird.

Auflösung. Man drücke $\cos w$ aus jedem der beiden kleineren Dreiecke nach § 3, Folg. aus, setze die Werte gleich, eliminiere v mittelst der Gleichung $u + v = b$ und beseitige die Nenner; so ergibt sich, wenn man die entstehende Gleichung durch $\cos u$ dividirt,

$$\text{tang } u = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \sin b} \text{ und dem analog}$$

$$\text{tang } v = \frac{\cos a - \cos c \cdot \cos b}{\cos c \cdot \sin b}.$$

10) Zu beweisen, daß, wenn man in einem rechtwinkligen sphärischen Dreieck aus dem Scheitel des rechten Winkels die Höhe auf die Hypotenuse fällt,

1, die Tangente jeder der beiden Katheten die mittlere Proportionale ist zwischen der Tangente der Hypotenuse und der Tangente des an der Kathete liegenden Hypotenusen-Abschnitts,

2, der Sinus der Höhe die mittlere Proportionale ist zwischen den Tangenten der Hypotenusen-Abschnitte.

Das erste ergibt sich, wenn man die Tangente der Kathete einerseits nach § 5, Folg. 1 aus dem ganzen Dreieck, andererseits nach § 5, Folg. 2 aus dem kleineren Dreieck, in welchem sie liegt, ausdrückt und die Gleichungen multipliziert.

Das zweite ergibt sich, wenn man den Sinus der Höhe aus einem der kleineren Dreiecke nach § 4, Folg. 1 ausdrückt und die Gleichung quadriert, ferner in den Gleichungen von Nr. 9, unter Voraussetzung, daß B der rechte Winkel ist, $\cos b = \cos a \cdot \cos c$ einträgt, die Gleichungen multipliziert und § 4 berücksichtigt.

Leichter noch gelangt man zur zweiten Behauptung, wenn man den Sinus der Höhe aus jedem der beiden kleineren Dreiecke mittelst § 6, Folg. 2 ausdrückt und die beiden Gleichungen multipliziert.

11) Zu beweisen, daß in jedem sphärischen Dreieck der einen Winkel halbierende Bogen eines größten Kreises die Gegenseite so teilt, daß die Sinus der Abschnitte sich wie die Sinus der beiden andern Seiten verhalten.

Dies ergibt sich unmittelbar, wenn man die Sinus der Abschnitte nach § 10 ausdrückt.

12) Aus den Seiten eines sphärischen Dreiecks die Abschnitte zu berechnen, in welche eine seiner Seiten durch die Halbierungslinie des Gegenwinkels geteilt wird.

Auflösung. Es sei in Fig. 16, a Bogen w nicht die Höhe, sondern die Halbierungslinie von B , also $X = Y = \frac{1}{2}B$, so eliminiere man aus der eben gefundenen Proportion v mittelst der Gleichung $u + v = b$; dividiert man dann die entstehende Gleichung durch $\sin u$, so erhält man

$$\cot u = \frac{\sin c + \sin a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b} \text{ und dem analog}$$

$$\cot v = \frac{\sin a + \sin c \cdot \cos b}{\sin c \cdot \sin b}.$$

13) Aus den Winkeln eines sphärischen Dreiecks

1, die Winkel, welche die Halbierungslinie eines Winkels mit der Gegenseite bildet,

2, die Halbierungslinie selbst zu berechnen.

Auflösung. Stellt man in Fig. 16, a — unter der erwähnten Voraussetzung — den $\cos w$ nach § 12, Folg. aus jedem der beiden kleinern Dreiecke dar: so erhält man, da $\cos BDA = -\cos BDC$ ist, durch Komparierung beider Werte nach einigen Umformungen

$$\cos BDC = \frac{\sin \frac{1}{2}(C + A) \cdot \sin \frac{1}{2}(C - A)}{\cos \frac{1}{2}B}.$$

Drückt man dagegen $\cos a$ auf dieselbe Weise aus dem ganzen und dem einen kleinern Dreieck aus und eliminiert man ihn, so erhält man, wiederum nach einigen leichten Änderungen,

$$\cos w = \frac{\cos \frac{1}{2}(C + A) \cdot \cos \frac{1}{2}(C - A)}{\sin BDC \cdot \sin \frac{1}{2}B}.$$

Dividiert man diese Gleichung in $\sin w = \frac{\sin a \cdot \sin C}{\sin BDC}$, so erhält

$$\text{man } \tan w = \frac{\sin a \cdot \sin C \cdot \sin \frac{1}{2}B}{\cos \frac{1}{2}(C + A) \cdot \cos \frac{1}{2}(C - A)}.$$

Eliminiert man nun $\sin a$ mittelst § 14, so findet man

$$\tan w = \frac{A}{\cos \frac{1}{2}(C + A) \cdot \cos \frac{1}{2}(C - A) \cdot \cos \frac{1}{2}B}.$$

Fig. 16, a. 14) Aus einem Winkel B eines sphärischen Dreiecks und den beiden Abschnitten u und v, in welche die Gegenseite durch die aus B gefällte Höhe geteilt wird, das Übrige zu finden.

Auflösung. Bezeichnet man die Differenz der beiden Winkel, in welche B durch die Höhe geteilt wird, mit x, die Winkel selbst also mit $\frac{B+x}{2}$ und $\frac{B-x}{2}$: so ergibt sich, wenn man den Sinus der Höhe nach § 6, Folg. 2 doppelt ausdrückt und die Werte gleichsetzt, eine Gleichung für x, aus welcher nach „Ebene Trigon.

$$\text{Anhang 35 und 39} \quad \sin x = \frac{\sin(u-v) \cdot \sin B}{\sin b} \text{ u. f. w.}$$

15) Aus einer Seite a eines sphärischen Dreiecks, der Summe s der beiden andern Seiten und dem Gegenwinkel A der ersten Seite das Übrige zu finden.

Auflösung. Bezeichnet man die eine der beiden unbekannten Seiten mit x, die andere demnach mit s — x, so erhält man aus

$$\cos \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \cdot \sin c}}$$

eine Gleichung in x, welche nach „Ebene Trigon. § 15“

$$\cos(2x-s) = \cos s + \frac{2\sin \frac{1}{2}(s+a) \cdot \sin \frac{1}{2}(s-a)}{\cos^2 \frac{1}{2}A} \text{ ergibt.}$$

16) Aus den drei Winkeln eines sphärischen Dreiecks die Entfernung der Winkelpunkte von dem Pole des durch dieselben gehenden kleinern Kugelskreises zu berechnen.

Anmerkung. Jener Pol heißt der sphärische Mittelpunkt, seine Entfernung von den Winkelpunkten der sphärische Halbmesser r des um das Dreieck beschriebenen oder Eckenkreises.

Auflösung. Die von den Seiten des Dreiecks und den sphärischen Radien gebildeten Dreiecke sind gleichschenkelig, ihre Basiswinkel also paarweise gleich. Bezeichnet man nun die an a anliegenden mit α , so ergibt sich $\alpha = \frac{1}{2}(B+C-A) = \frac{1}{2}S - A$, und dem analog $\beta = \frac{1}{2}S - B$, $\gamma = \frac{1}{2}S - C$.

Geht man auf die rechtwinkligen Dreiecke, die Hälften der gleichschenkligen zurück, so ist nach § 5, Folg. 2

$$\operatorname{tang} r = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}a}{\cos \alpha},$$

$$\begin{aligned} \text{d. i. (nach § 14)} &= \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2}S}{\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma}} \\ &= \frac{-\cos \frac{1}{2}S}{1}. \end{aligned}$$

17) Aus den drei Seiten eines sphärischen Dreiecks den sphärischen Radius des Eckkreises zu finden.

Auflösung. Trägt man in die vorige Gleichung $\frac{L \cdot \sin A}{\sin a}$ für A und $2\sin\frac{1}{2}a \cdot \cos\frac{1}{2}a$ für $\sin a$ ein, so erhält man

$$\operatorname{tang} r = \frac{-2\cos\frac{1}{2}S \cdot \sin\frac{1}{2}a \cdot \cos\frac{1}{2}a}{L \cdot \sin A}.$$

$$\text{Nun ist } \frac{-\cos\frac{1}{2}S \cdot \cos\frac{1}{2}a}{\sin A} = \sqrt{\frac{(-\cos\frac{1}{2}S)^2 \cdot \cos^2\frac{1}{2}a}{\sin^2 A}},$$

d. i. nach § 14

$$= \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}S \cdot \cos(\frac{1}{2}S - B) \cdot (-\cos\frac{1}{2}S) \cdot \cos(\frac{1}{2}S - C)}{\sin A \cdot \sin C \cdot \sin A \cdot \sin B}}$$

$$= \sin\frac{1}{2}b \cdot \sin\frac{1}{2}c, \text{ also}$$

$$\operatorname{tang} r = \frac{2\sin\frac{1}{2}a \cdot \sin\frac{1}{2}b \cdot \sin\frac{1}{2}c}{L}.$$

18) Aus den drei Seiten eines sphärischen Dreiecks den sphärischen Radius ϱ des in das Dreieck beschriebenen, d. h. die Seiten berührenden Kreises zu finden*).

Auflösung. Legt man durch den sphärischen Mittelpunkt des Berührungskreises und die Winkelpunkte Bogen größter Kreise und fällt aus ihm senkrechte Bogen auf die Seiten: so werden die Winkel des Dreiecks halbiert, und die zu beiden Seiten der Halbierungslinien liegenden rechtwinkligen Dreiecke sind symmetrisch. Bezeichnet man nun die am Winkelpunkt A anliegenden Katheten mit α , so ergibt sich

$$\alpha = \frac{1}{2}(b + c - a) = \frac{1}{2}s - a, \text{ und dem analog}$$

$$\beta = \frac{1}{2}(a + c - b) = \frac{1}{2}s - b,$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(b + a - c) = \frac{1}{2}s - c.$$

Nun ist nach § 6, Folg. 1

$$\operatorname{tang} \varrho = \sin \alpha \cdot \operatorname{tang}\frac{1}{2}A, \text{ d. i.}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - a) \cdot \sin(\frac{1}{2}s - b) \cdot \sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin\frac{1}{2}s}} = \frac{L}{\sin\frac{1}{2}s}$$

$$\text{und } \cot \varrho = \frac{\sin\frac{1}{2}s}{L}.$$

19) Den sphärischen Halbmesser ϱ des in ein Dreieck beschriebenen Kreises durch die Winkel des Dreiecks auszudrücken.

*) Zu dem Mittelpunkte dieses Kreises gelangt man offenbar, wenn man zwei Winkel des Dreiecks halbiert.

Auflösung. Trägt man in die letzte Gleichung für L seinen Wert $\frac{A \sin a}{\sin A}$ und für $\sin A$ den Wert $2 \sin \frac{1}{2} A \cdot \cos \frac{1}{2} A$ ein, so erhält man

$$\cot \varphi = \frac{2 \sin \frac{1}{2} s \cdot \sin \frac{1}{2} A \cdot \cos \frac{1}{2} B}{A \sin a}.$$

$$\text{Nun ist } \frac{\sin \frac{1}{2} s \cdot \sin \frac{1}{2} A}{\sin a} = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} s \cdot \sin(\frac{1}{2} s - b) \cdot \sin \frac{1}{2} s \cdot \sin(\frac{1}{2} s - c)}{\sin a \cdot \sin c \cdot \sin a \cdot \sin b}}$$

$$= \cos \frac{1}{2} B \cdot \cos \frac{1}{2} C,$$

$$\text{also } \cot \varphi = \frac{2 \cdot \cos \frac{1}{2} A \cdot \cos \frac{1}{2} B \cdot \cos \frac{1}{2} C}{A}.$$

Anmerkung 1. Da nach § 17

$$\sin \frac{1}{2} E = \frac{L}{2 \cos \frac{1}{2} a \cdot \cos \frac{1}{2} b \cdot \cos \frac{1}{2} c} \text{ ist,}$$

gehen die in Nr. 17 und 18 gefundenen Formeln in

$$\tan r = \frac{\tan \frac{1}{2} a \cdot \tan \frac{1}{2} b \cdot \tan \frac{1}{2} c}{\sin \frac{1}{2} E} \text{ und}$$

$$\cot \varphi = \frac{\sin \frac{1}{2} s}{2 \cos \frac{1}{2} a \cdot \cos \frac{1}{2} b \cdot \cos \frac{1}{2} c \cdot \sin \frac{1}{2} E} \text{ über.}$$

Anmerkung 2. Ähnliche Ausdrücke ergeben sich für die sphärischen Radien der drei äußeren Berührungskreise, d. h. derjenigen Kreise, welche je eine Seite des Dreiecks und die Verlängerungen der beiden andern berühren.

20) Das Verhältniß zu finden, in welchem die Tangente des Radius des um ein Dreieck beschriebenen Kreises zur Cotangente des Radius des einbeschriebenen steht.

$$\text{Auflösung. } \tan r : \cot \varphi = 2 \sin \frac{1}{2} a \cdot \sin \frac{1}{2} b \cdot \sin \frac{1}{2} c : \sin \frac{1}{2} s$$

$$\text{oder} = - \cos \frac{1}{2} S : 2 \cos \frac{1}{2} A \cdot \cos \frac{1}{2} B \cdot \cos \frac{1}{2} C.$$

Von der bekannten, in mehr als 600 000 Exemplaren verbreiteten

Clementar-Mathematik von **Professor Dr. L. Kambly**

werden auch die **neuen Lehrpläne** berücksichtigende **Neubearbeitungen der Planimetrie, Trigonometrie und Stereometrie** vorbereitet. Zunächst soll im Herbst d. Js. erscheinen die **Planimetrie** in zwei Ausgaben.

Dagegen liegt bereits vor die Neubearbeitung der

Arithmetik und Algebra

von **Dr. F. Langguth**, Direktor des Realgymnasiums zu Iserlohn.

In 2 Ausgaben:

Für Realgymnasien, Oberreal- und Realschulen. Geb. 2 *M.* — Für Gymnasien. 2. Aufl. Geb. 1,65 *M.*

(Die alte Ausgabe bleibt bis auf weiteres nebenbei bestehen.)

Die **Kambly'sche Mathematik** ist in folgenden Teilen und Auflagen erschienen:

I. Teil: **Arithmetik und Algebra.**

33. Auflage. Geb. 1,65 *M.*

II. Teil: **Planimetrie.**

96. und 97. Auflage. Geb. 1,65 *M.*

III. Teil: **Ebene u. sphärische Trigonometrie.**

21. Auflage. Geb. 1,50 *M.*

IV. Teil: **Stereometrie.**

22. Auflage. Geb. 1,50 *M.*

Mit zahlreichen Figurentafeln.

Die Kambly'schen Bücher werden nur gebunden geliefert.

Neue Ergänzungen zu Kambly's Mathematik

herausgegeben von

Gymnasial-Oberlehrer **Herm. Roeder** zu Hannover.

Vielseitig ausgedrückten Wünschen zufolge sind veröffentlicht worden:

Der Koordinatenbegriff und einige Grundeigenschaften der Kegelschnitte.

Zunächst eine Ergänzung der Neubearbeitung der **Planimetrie** von Kambly. Zum Gebrauche an Gymnasien nach den neuen preussischen Lehrplänen bearbeitet. Mit 36 Figuren. Steif geheftet 60 *S.* (Soeben erschienen!)

Lehrsätze und Aufgaben aus der Planimetrie. 2. verb. Aufl. Geb. 1 *M.*

Aufgaben aus der ebenen Trigonometrie. Geb. 1,35 *M.* (Neu!) — Auflösungen hierzu. Steif geb. 1,25 *M.*

Eine **Aufgabensammlung zur Stereometrie** ist in Vorbereitung.

Ende des Vorjahres sind erschienen:

Die Elemente der Mathematik für Gymnasien.

Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet

von **Dr. Th. Wimmenauer**, Gymnasial-Oberlehrer.

I. Teil: **Arithmetik.** Mit 3 Figuren. 2. umgearbeitete Auflage. Geb. 2 *M.*

Die Teile II: **Planimetrie** und III: **Trigonometrie und Stereometrie** sollen bald nach Ostern erscheinen. — Von demselben Verfasser wird vorbereitet eine **Aufgabensammlung zur Arithmetik** von Kambly-Langguth.

Vor kurzem wurde veröffentlicht:

Raumlehre für Lehrerseminare. Bearbeitet von den Seminarlehrern Seminar-Oberlehrer **K. Badhaus**. Mit 137 Figuren im Text. Geh. 1,60 *M.*

Eine Ergänzung zu vorstehendem neuen Buche bildet die früher erschienene und bereits vielfach eingeführte

Sammlung geometrischer Rechenaufgaben zum Gebrauch an Seminarien, sowie zum Selbstunterricht, herausgegeben von den Seminarlehrern **W. Tichtblau** und **B. Wiese**. 1,25 *M.* Geh. 1,50 *M.*

Schriften von Dr. G. Lachemann,

Direktor der städt. Gewerbeschule (Realschule mit Fachklassen) zu Barmen.

Die Elemente der Arithmetik. Ein Lehr- und Übungsbuch für den arithmetischen Unterricht an 6-klassigen höheren Lehranstalten. 2. verbesserte Auflage. Kart. 75 *S.*

Die Elemente der Geometrie. Ein Lehr- und Übungsbuch für den geometrischen Unterricht an 6-klassigen höheren Lehranstalten. 2 Teile: I. Planimetrie. 3. verbesserte Auflage. Kart. 1,25 *M.* II. Trigonometrie und Stereometrie. Kart. 80 *S.*

Übungen und Aufgaben für den propädeutischen Unterricht in der Geometrie. Auf Grund rein konstruktiver Methoden in stufenmäßiger Reihenfolge zum Gebrauche an Gymnasien, Realgymnasien und verwandten Anstalten zusammengestellt von Professor **Dr. Josef Diekmann**, Direktor des Realprogymnasiums zu Biersen. **Zwei Teile.**

- I. Teil: Vorübungen zur euklidischen Geometrie. (Pensum für Quinta, bezw. für das 1. Tertial in Quarta.) 75 *S.*
- II. Teil: Vorübungen zur synthetischen Geometrie, einschl. der Kegelschnitte. 2. vermehrte und verbesserte Auflage. 60 *S.*

Der erste Unterricht in der Geometrie. Für die Quinten aller höheren Lehranstalten bearbeitet von **Dr. Karl Breitsprecher**, Direktor der II. evangelischen Realschule zu Breslau.

- I. Heft: Die Strecke als Element geometrischer Konstruktionen. 60 *S.*
- II. Heft: Der Winkel als Element geometrischer Konstruktionen. 80 *S.*

Diese sich sehr schnell einbürgernden Hefte sind auf Schreibpapier gedruckt, um dem Schüler das Einzeichnen zu ermöglichen.

Simon, Dr. Max, Geometrie für höhere Bürgerschulen (Mittelschulen) und Lehrer-Seminare. Ein methodischer Leitfaden in heuristischer Darstellung. Mit 101 Abbildungen im Text. 3. Auflage. Kart. 1 *M.*

***Ohlert, A., Reg.- und Schulrat, Praktischer Lehrgang der Geometrie für Mittelschulen.** Siebente Auflage, neu bearbeitet von **Dr. Bernh. Ohlert**, weil. Direktor des Realgymnasiums zu St. Petri u. Pauli in Danzig. Mit einer Tafel Abbildungen. Kart. 80 *S.*

Ältere Bücher:

Crappe, Prof. A., Schul-Arithmetik. 1,50 *M.*

***Mütrich, J. A., Sammlung stereometr. Aufgaben,** herausgeg. v. H. v. Behr. 1 *M.*

*Diese Bücher sind in J. H. Von's Verlag in Königsberg i. Pr. erschienen.

ANTYKWARIAT

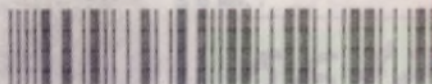


100.1

E * 113487

Wojewódzka Biblioteka
Publiczna w Opolu

5672/III S



001-005673-03-0