ENCYKLOPÆDIE

DER

NATURWISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN

VON

PROF. DR. G. JÄGER, PROF. DR. A. KENNGOTT,
PROF. DR. LADENBURG, PROF. DR. VON OPPOLZER,
PROF. DR. SCHENK, GEH. SCHULRATH DR. SCHLÖMILCH,
PROF. DR. G. C. WITTSTEIN, PROF. DR. VON ZECH.

ERSTE ABTHEILUNG, 24. LIEFERUNG

ENTHÄLT:

HANDBUCH DER MATHEMATIK.

ZEHNTE LIEFERUNG.

BRESLAU,
VERLAG VON EDUARD TREWENDT.
1881.

Inhalt der vierundzwanzigsten Lieferung:

Fortsetzung des Handbuchs der Mathematik. Differentialrechnung (Schluss) von Professor Dr. Heger. (Seite 561—568.)

Ferner: Integralrechnung von Professor Dr. Heger. (Seite 569—704.)

$$A_7 - \frac{A_5}{2!} + \frac{A_3}{4!} - \frac{A_1}{6!} = -\frac{1}{7!},$$

$$A_9 - \frac{A_7}{2!} + \frac{A_5}{4!} - \frac{A_3}{6!} + \frac{A_1}{8!} = \frac{1}{9!},$$

$$A_{11} - \frac{A_9}{2!} + \frac{A_7}{4!} - \frac{A_5}{6!} + \frac{A_3}{8!} - \frac{A_1}{10!} = -\frac{1}{11!},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Hieraus gewinnt man

$$A_3 = \frac{1}{3}, \quad A_5 = \frac{2}{15}, \quad A_7 = \frac{17}{315}, \quad A_9 = \frac{29}{945}, \ldots$$

Ueber das allgemeine Glied der Reihe und über die Convergenzbedingungen erhält man hierbei keinen Aufschluss.

Aus der Reihe

$$arc\,sin\,x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots$$

kann man durch direkte Multiplication eine Potenzreihe für $(arc\,sin\,x)^2$ ableiten, die zwischen denselben Grenzen convergirt wie die obige, und nur die geraden Potenzen von x enthält; die Coefficienten dieser Reihe werden dabei als endliche Reihen erhalten, deren Summen sich nicht ohne Weiteres in knapper Form darstellen lassen. Durch die Methode der unbestimmten Coefficienten kann man in folgender Weise das Ziel erreichen. Differenzirt man

$$(arc\,sin\,x)^2 = A_2 x^2 + A_4 x^4 + A_6 x^6 + \ldots,$$

so entsteht

$$\frac{2\,arc\,sin\,x}{\sqrt{1-x^2}} = 2A_2 x + 4A_4 x^3 + 6A_6 x^5 + \ldots;$$

folglich ist

$$2\,arc\,sin\,x = (2A_2 x + 4A_4 x^3 + \ldots)\sqrt{1-x^2}.$$

Hieraus erhält man durch Differentiation

$$\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = (2\cdot 1 A_2 + 4\cdot 3 A_4 x^2 + 6\cdot 5 A_6 x^4 + \ldots)\sqrt{1-x^2}$$
$$- (2A_2 x + 4A_4 x^3 + 6A_6 x^5 + \ldots)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Beseitigt man die irrationalen Nenner, so erhält man

$$2 = (2A_2 + 4\cdot 3A_4 x^2 + 6\cdot 5A_6 x^4 + \ldots)(1-x^2) - (2A_2 x^2 + 4A_4 x^4 + 6A_6 x^6 + \ldots).$$

Hieraus folgen die Gleichungen

$$A_2 = 1, \quad (2n+2)(2n+1)A_{2n+2} - 2n(2n-1)A_{2n} - 2nA_{2n} = 0,$$

also

$$A_{2n+2} = \frac{(2n)^2}{(2n+1)(2n+2)} A_{2n}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$A_{2n+2} = \frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2 \ldots (2n)^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 \ldots (2n+1)(2n+2)} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n-1)(2n+1)}\cdot\frac{1}{n+1}$$

Daher hat man die Reihenentwicklung

$$(arc\,sin\,x)^2 = x^2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{x^6}{3} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{x^8}{4} + \ldots -1 \leqq x \leqq 1.$$

Zwischen denselben Gültigkeitsgrenzen ist

$$\frac{arc\,sin\,x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot x^5 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot x^7 + \ldots$$

§ 17. Unendliche Produkte.

1. Bekanntlich ist

$$sin\,3u = 3\,sin\,u - 4\,sin^3 u\,,$$
$$cos\,3u = 4\,cos^3 u - 3\,cos\,u\,,$$
$$\begin{aligned} sin\,5u &= sin\,3u\,cos\,2u + sin\,2u\,cos\,3u\,,\\ &= sin\,3u\,(1 - 2\,sin^2 u) + 2\,sin\,u\,(4\,cos^4 u - 3\,cos^2 u)\,,\\ &= 5\,sin\,u - 20\,sin^3 u + 16\,sin^5 u\,. \end{aligned}$$

Auf Grund dieser Formeln kann man den Nachweis dafür versuchen, dass für ein ungerades μ

1. $$sin\,\mu u = A_0\,sin\,u + A_2\,sin^3 u + A_4\,sin^5 u + \ldots + A_{\mu-1}\,sin^{\mu} u\,.$$

Man hat zunächst

$$\begin{aligned} sin(2n+1)\,u &= sin(2n-1)\,u \cdot cos\,2u + cos(2n-1)\,u \cdot sin\,2u\\ &= sin(2n-1)\,u \cdot (1 - 2\,sin^2 u) + 2\,cos(2n-1)\,u \cdot cos\,u\,sin\,u\,. \end{aligned}$$

Die Entscheidung darüber, ob sich $sin(2n+1)u$ nach ungeraden Potenzen von $sin\,u$ entwickeln lässt, hängt somit davon ab, ob $sin(2n-1)u$ und $cos(2n-1)\,u \cdot cos\,u \cdot sin\,u$ diese Entwicklung zulassen. Für das letztere Produkt hat man

$$cos(2n-1)u \cdot cos\,u = cos(2n-3)u \cdot cos\,u \cdot (1 - 2\,sin^2 u) - 2\,sin(2n-3)\,u\,(1 - sin^2 u)\,.$$

Wenn sich also $sin(2n-3)\,u$, $cos(2n-3)\,u \cdot cos\,u \cdot sin\,u$ und $sin(2n-1)u$ gemäss 1. entwickeln lassen, so ist diese Entwicklung auch für $sin(2n+1)\,u$ und $cos(2n-1)u \cdot cos\,u\,sin\,u$ nachgewiesen. Da sie nun für

$$sin\,3u\,, \quad cos\,3u\,cos\,u\,sin\,u\,, \quad sin\,5u$$

gilt, so gilt sie allgemein.

Aus der Gleichung 1. folgt

2. $$\frac{sin\,\mu\,u}{sin\,u} = A_0 + A_2\,sin^2 u + \ldots + A_{\mu-1}\,sin^{\mu-1} u\,.$$

Geht man zur Grenze für $u = 0$ über, so erhält man

3. $$A_0 = lim\,\frac{sin\,\mu\,u}{sin\,u} = \mu\,lim\,\frac{sin\,\mu\,u}{\mu u} \cdot \frac{u}{sin\,u} = \mu\,.$$

Bezeichnet man mit $u_1, u_2, \ldots u_{\mu-1}$ die Werthe von u, für welche die rechte Seite der Gleichung 2. verschwindet, so ist

4. $$\frac{sin\,\mu\,u}{sin\,u} = A_{\mu-1}(sin\,u_1 - sin\,u)\,(sin\,u_2 - sin\,u)\,\ldots\,(sin\,u_{\mu-1} - sin\,u)\,.$$

Ferner folgt aus 2. und 3.

5. $$\mu = A_{\mu-1}\,sin\,u_1\,sin\,u_2\,sin\,u_3\,\ldots\,sin\,u_{\mu-1}\,,$$

und durch Division aus 4. durch 5.

$$\frac{sin\,\mu\,u}{\mu\,sin\,u} = \left(1 - \frac{sin\,u}{sin\,u_1}\right)\left(1 - \frac{sin\,u}{sin\,u_2}\right)\left(1 - \frac{sin\,u}{sin\,u_3}\right)\ldots\left(1 - \frac{sin\,u}{sin\,u_{\mu-1}}\right).$$

Die linke Seite dieser Gleichung verschwindet für die $\mu - 1$ von einander verschiedenen Bogen

$$u = \begin{cases} \dfrac{\pi}{\mu}, & \dfrac{2\pi}{\mu}, \quad \dfrac{3\pi}{\mu}, \ldots \dfrac{\frac{1}{2}(\mu-1)\pi}{\mu},\\ -\dfrac{\pi}{\mu}, & -\dfrac{2\pi}{\mu}, \quad -\dfrac{3\pi}{\mu}, \ldots -\dfrac{\frac{1}{2}(\mu-1)\pi}{\mu}. \end{cases}$$

Setzt man diese Werthe für $u_1 \ldots u_{\mu-1}$, so kann man die aus je zwei entgegengesetzt gleichen Bogen entstehenden Faktoren vereinen und erhält

$$\frac{sin\,\mu\,u}{\mu\,sin\,u} = \left[1 - \frac{sin^2 u}{sin^2\frac{\pi}{\mu}}\right]\left[1 - \frac{sin^2 u}{sin^2\frac{2\pi}{\mu}}\right]\ldots\left[1 - \frac{sin^2 u}{sin^2\frac{(\mu-1)\pi}{2\mu}}\right].$$

Ersetzt man μu durch x, so entsteht

6. $$\frac{sin\,x}{\mu\,sin\frac{x}{\mu}} = \left[1 - \frac{sin^2\frac{x}{\mu}}{sin^2\frac{\pi}{\mu}}\right]\left[1 - \frac{sin^2\frac{x}{\mu}}{sin^2\frac{2\pi}{\mu}}\right]\ldots\left[1 - \frac{sin^2\frac{x}{\mu}}{sin^2\frac{(\mu-1)\pi}{2\mu}}\right].$$

Es liegt nahe, hier zur Grenze für ein unendliches wachsendes μ überzugehen. Die linke Seite hat wegen

$$lim\,\mu\,sin\frac{x}{\mu} = lim\left(sin\frac{1}{\mu}x : \frac{1}{\mu}\right) = x$$

den Grenzwerth $sin\,x : x$. Die rechte Seite wird zu einem Produkte aus unendlich vielen Faktoren, und hat nur dann eine analytische Bedeutung, wenn nachgewiesen werden kann, dass das Produkt der ersten n Faktoren sich einer Grenze bis zu jedem Grade der Genauigkeit nähert, wenn man nur n gross genug wählt. Um dies nachzuweisen, haben wir zu zeigen, dass das Produkt der Faktoren vom $(n+1)$ten an

$$R = \left[1 - \frac{sin^2\frac{x}{\mu}}{sin^2\frac{(n+1)\pi}{\mu}}\right]\left[1 - \frac{sin^2\frac{x}{\mu}}{sin^2\frac{(n+2)\pi}{\mu}}\right]\ldots\ldots$$

für einen unendlich grossen Werth von n mit der Einheit bis zu jedem Grade der Genauigkeit übereinstimmt. Die Brüche

$$\frac{n+1}{\mu}, \quad \frac{n+2}{\mu}, \quad \frac{n+3}{\mu}, \ldots$$

sind echte Brüche, kleiner als $\frac{1}{2}$ (vergl. 6), und daher

$$\frac{n+1}{\mu}\pi, \quad \frac{n+2}{\mu}\pi, \quad \frac{n+3}{\mu}\pi \ldots$$

spitze Winkel. Setzt man nun $x < (n+1)\,\pi$ voraus, so sind die Faktoren von R sämmtlich echte Brüche und daher

11. $$R_n < 1\,.$$

Um eine untere Grenze für R zu erhalten, bemerken wir, dass für positive echt gebrochene Werthe von $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$

$$(1 - Q_1)(1 - Q_2) = 1 - (Q_1 + Q_2) + Q_1 Q_2 > 1 - (Q_1 + Q_2)$$
$$(1 - Q_1)(1 - Q_2)(1 - Q_3) > [1 - (Q_1 + Q_2)](1 - Q_3) > 1 - (Q_1 + Q_2 + Q_3)$$

und daher allgemein

$$(1 - Q_1)(1 - Q_2)(1 - Q)(1 - Q_4)\ldots > 1 - (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + \ldots)\,.$$

Folglich ist

12. $$R > 1 - \left[\frac{sin^2\frac{x}{\mu}}{sin^2\frac{(n+1)\pi}{\mu}} + \frac{sin^2\frac{x}{\mu}}{sin^2\frac{(n+2)\pi}{\mu}} + \ldots\right].$$

Da $$sin\frac{n+1}{\mu}\pi < sin\frac{n+2}{\mu}\pi < sin\frac{n+3}{\mu}\pi < \ldots,$$

so wird der Klammerinhalt vergrössert, wenn man jeden der $(\mu - 2n - 1) : 2$ Nenner durch den ersten ersetzt; daher ist

$$R_n > 1 - \frac{\mu - 2n - 1}{2} \cdot \frac{sin^2\frac{x}{\mu}}{sin^2\frac{n+1}{\mu}\pi}\,.$$

Setzt man $\mu = \rho n$, so erhält man

13. $$R_n > 1 - \frac{\rho n - 2n - 1}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{\rho n}}{\sin^2 \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\pi}{\rho}}.$$

Für einen unendlich grossen Werth von n ist

$$\lim(\rho n - 2n - 1) \cdot \sin^2 \frac{x}{\rho n} = \lim x^2 \frac{\rho n - 2n - 1}{\rho^2 n^2} = 0.$$

Daher folgt aus 12. und 13.

$$\lim R_n = 1.$$

Folglich bleibt 8. auch für $\mu = \infty$ gültig; da nun

$$\lim \frac{\sin \frac{x}{\mu}}{\sin \frac{k\pi}{\mu}} = \frac{x}{k\pi},$$

so hat man in Rücksicht auf 9.

14. $$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots\cdots$$

gültig für jeden endlichen Werth von x.

Setzt man $x = \frac{\pi}{6}$, so ist $\sin x = \frac{1}{2}$, und man hat

$$\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6^2} \cdot \frac{11 \cdot 13}{12^2} \cdot \frac{17 \cdot 19}{18^2} \cdot \frac{23 \cdot 25}{24^2} \cdots\cdots$$

und daher

$$\frac{\pi}{3} = \frac{6^2}{5 \cdot 7} \cdot \frac{12^2}{11 \cdot 13} \cdot \frac{18^2}{17 \cdot 19} \cdot \frac{24^2}{23 \cdot 25} \cdots\cdots$$

Für $x = \frac{\pi}{2}$ erhält man das schwächer convergirende unendliche Produkt

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6^2}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8^2}{7 \cdot 9} \cdots\cdots$$

2. Aus der im Eingange des vorigen Abschnitts gemachten Bemerkung ist ersichtlich, dass man $\cos \mu u \cos u$ für jedes ungerade ganze μ nach geraden Potenzen von $\sin u$ entwickeln kann, in der Form

1. $$\cos \mu u \cos u = B_0 + B_2 \sin^2 u + B_4 \sin^4 u + \dots + B_{\mu+1} \sin^{\mu+1} u.$$

Setzt man $u = 0$, so erhält man

2. $$B_0 = 1.$$

Sind wieder $u_1, u_2, u_3 \dots u_{\mu+1}$ die Werthe von u, für welche die rechte Seite von 1. verschwindet, so hat man

$$\cos \mu u \cdot \cos u = B_{\mu+1}(\sin u_1 - \sin u)(\sin u_2 - \sin u) \dots (\sin u_{\mu+1} - \sin u).$$

Ferner folgt aus 1. und 2.

$$1 = B_{\mu+1} \sin u_1 \sin u_2 \dots \sin u_{\mu+1},$$

folglich ist

3. $$\cos \mu u \cos u = \left(1 - \frac{\sin u}{\sin u_1}\right)\left(1 - \frac{\sin u}{\sin u_2}\right) \dots \left(1 - \frac{\sin u}{\sin u_{\mu+1}}\right).$$

Die linke Seite verschwindet für die von einander verschiedenen Bogen

$$u = \begin{cases} \frac{\pi}{2\mu}, & \frac{3\pi}{2\mu}, & \frac{5\pi}{2\mu}, & \dots & \frac{\mu\pi}{2\mu}, \\ -\frac{\pi}{2\mu}, & -\frac{3\pi}{2\mu}, & -\frac{5\pi}{2\mu}, & \dots & -\frac{\mu\pi}{2\mu}. \end{cases}$$

Daher ist, wenn man noch μu mit x vertauscht

4. $$\cos x \cdot \cos \frac{x}{\mu} = \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{\mu}}{\sin^2 \frac{\pi}{2\mu}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{\mu}}{\sin^2 \frac{3\pi}{2\mu}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{\mu}}{\sin^2 \frac{5\pi}{2\mu}}\right) \dots \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{\mu}}{\sin^2 \frac{\mu\pi}{2\mu}}\right).$$

Das Produkt

$$R_n = \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{\mu}}{\sin^2 \frac{2n+1}{2\mu}\pi}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{\mu}}{\sin^2 \frac{2n+3}{2\mu}\pi}\right)\cdots\cdots$$

enthält lauter echt gebrochene Faktoren, sobald man voraussetzt, dass $x < \frac{n+1}{2}\pi$ ist; daher hat man

5. $$R_n < 1.$$

Ferner ist

$$R_n > 1 - \left(\frac{\sin^2 \frac{x}{\mu}}{\sin^2 \frac{2n+1}{2\mu}\pi} + \frac{\sin^2 \frac{x}{\mu}}{\sin^2 \frac{2n+3}{2\mu}\pi} + \cdots\cdots\right),$$

6. $$R_n > 1 - \frac{\mu - 2n + 2}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{\mu}}{\sin^2 \frac{2n+1}{2\mu}\pi}.$$

Nun ist für $\mu = \rho n$

$$(\mu - 2n + 2) \cdot \sin^2 \frac{x}{\mu} : \sin^2 \frac{2n+1}{2\mu}\pi = (\rho n - 2n + 2) \sin^2 \frac{x}{\rho n} : \sin^2 \frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{\pi}{\rho},$$

folglich hat diese Grösse für ein unendlich grosses n die Null zur Grenze. Aus 5. und 6. folgt

$$\lim R_n = 1.$$

Geht man nun auch in 4. zur Grenze für $\mu = \infty$ über, so erhält man

7. $$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{29\pi^2}\right)\cdots$$

Ersetzt man x durch $\frac{1}{2}x$, so entsteht

$$\cos \tfrac{1}{2}x = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{25\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{49\pi^2}\right)\cdots\cdots$$

Beide Entwicklungen sind für jedes endliche x gültig.

Die unendlichen Produkte für $\sin x$ und $\cos x$ ergeben durch Division

$$\tan g\, x = x \frac{\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots\cdots}{\left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{49\pi^2}\right)\cdots\cdots}.$$

3. Wir schliessen hieran folgende für die einfachsten Fälle ausreichenden Bemerkungen über die Convergenz und Divergenz unendlicher Produkte*):

Wenn die Glieder der unendlichen Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \cdots\cdots$$

positiv und kleiner als Eins sind, und die Reihe convergirt, so convergiren auch die unendlichen Produkte

$$P = (1 - u_1)(1 - u_2)(1 - u_3)(1 - u_4)\cdots\cdots$$

*) WEIERSTRASS, Ueber die analyt. Facultäten, CRELLE's Journal, Bd. 51. 1856.

$$Q = (1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3)(1 + u_4) \ldots .$$

gegen Grenzwerthe, die endlich und von Null verschieden sind.

Jeder Faktor des Produktes

$$P_n = (1 - u_1)(1 - u_2) \ldots (1 - u_n)$$

ist nach der Voraussetzung ein echter Bruch; daher ist $P_n < 1$ und nimmt ab, wenn n wächst. Ferner kann man, wenn nur n gross genug ist, $m < n$ immer so wählen, dass

1. $$u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \ldots$$

kleiner ist als ein gegebener Bruch ε. Man hat

$$\frac{P_n}{P_m} = (1 - u_{m+1})(1 - u_{m+2}) \ldots (1 - u_n)$$

also

$$\frac{P_n}{P_m} > 1 - (u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_n).$$

Nach der Voraussetzung ist daher

$$P_n > P_m(1 - \varepsilon).$$

Hieraus folgt, dass sich P_n einer positiven, von Null verschiedenen Grenze nähert. Setzt man $P = P_n \cdot R_n$, so hat man die Ungleichung

$$1 > R_n > 1 - (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots).$$

Nach der Voraussetzung nähert sich die Reihe

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$$

mit wachsendem n der Grenze Null; je grösser n ist, um so weniger ist also R_n von der Einheit verschieden. Das Produkt P_n stimmt daher mit einem bestimmten positiven Grenzwerth P um so genauer und bis zu jedem Grade der Genauigkeit überein, je grösser man n wählt.

Ferner ist

$$\frac{1}{1 + u} = 1 - \frac{u}{1 + u}$$

und daher

$$\frac{1}{Q} = \left(1 - \frac{u_1}{1 + u_1}\right)\left(1 - \frac{u_2}{1 + u_2}\right)\left(1 - \frac{u_3}{1 + u_3}\right) \ldots .$$

Da nun die Reihe

$$\frac{u_1}{1 + u_1} + \frac{u_2}{1 + u_2} + \frac{u_3}{1 + u_3} + \ldots$$

mit der Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots .$ convergirt, so folgt, dass $1 : Q$ convergirt und einen endlichen Grenzwerthe hat. Dabei ist zu bemerken, dass

$$Q_n = (1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3) \ldots (1 + u_n)$$

sich dem Grenzwerthe Q nähert, indem es bei zunehmendem n unaufhörlich wächst.

Wenn dagegen die Reihe der positiven echten Brüche

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots .$$

divergirt, so divergiren die unendlichen Produkte

$$P = (1 - u_1)(1 - u_2)(1 - u_3) \ldots ,$$
$$Q = (1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3) \ldots ,$$

und zwar nähern sich

$$P_n = (1 - u_1) \ldots (1 - u_n) \quad \text{und} \quad Q_n = (1 + u_1) \ldots (1 + u_n)$$

mit wachsendem n bez. den Grenzen 0 und ∞.

Man hat zunächst

$$Q_n > 1 + (u_1 + u_2 + \ldots u_n).$$

Da nun $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ mit n unendlich wächst, so folgt, dass auch Q_n mit n unendlich gross wird.

Ferner ist

$$\frac{1}{P} = \left(1 + \frac{u_1}{1 - u_1}\right)\left(1 + \frac{u_2}{1 - u_2}\right) \ldots$$

Da nun die Reihe

$$\frac{u_1}{1 - u_1} + \frac{u_2}{1 - u_2} + \ldots$$

mit der Reihe $u_1 + u_2 + \ldots$ divergirt, so folgt, dass $1 : P$ unendlich gross, also P gleich Null ist.

Aus den beiden bewiesenen Sätzen ergiebt sich ohne Weiteres die Richtigkeit des folgenden: Wenn die Glieder der Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots .$$

sämmtlich von -1 verschieden sind, und von einem bestimmten Gliede an beständig dasselbe Vorzeichen haben, und kleiner als Eins bleiben, so hat das unendliche Produkt

$$P = (1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3) \ldots .$$

einen positiven von Null verschiedenen Werth, sobald die Reihe $u_1 + u_2 + \ldots$ convergirt.

Wenn dagegen unter übrigens denselben Voraussetzungen die Reihe $u_1 + u_2 + \ldots$ divergirt, so ist das unendliche Produkt P divergent, und zwar gleich Null, oder unendlich gross, je nachdem die Glieder der Reihe $u_1 + u_2 + \ldots$ von einer bestimmten Stelle an beständig negativ oder positiv bleiben.

4. Aus den in No. 1 und 2 entwickelten unendlichen Produkten gewinnt man noch einige bemerkenswerthe Reihen.

Nimmt man in No. 1, 14 beiderseits die Logarithmen, so erhält man

$$l\,sin\,x = lx + l\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) + \ldots .$$

Differenzirt man, so entsteht

1. $$cot\,x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{4\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{9\pi^2 - x^2} - \ldots .$$

Da nun

$$-\frac{2x}{k^2\pi^2 - x^2} = -\frac{1}{k\pi - x} + \frac{1}{k\pi + x},$$

so findet man schliesslich

2. $$cot\,x = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \frac{1}{3\pi + x} - \frac{1}{3\pi - x} + \ldots$$

Ersetzt man x durch πx, so entsteht

3. $$\pi \cdot cot\,\pi x = \frac{1}{x} + \frac{1}{1 + x} - \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{2 + x} - \frac{1}{2 - x} + \frac{1}{3 + x} - \frac{1}{3 - x} + \ldots$$

Nimmt man die Logarithmen in No. 2, 7, so erhält man

$$l\,cos\,x = l\left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right) + \ldots .$$

Durch Differentiation erhält man hieraus

4. $$tang\,x = \frac{8x}{\pi^2 - 4x^2} + \frac{8x}{9\pi^2 - 4x^2} + \frac{8x}{25\pi^2 - 4x^2} + \ldots$$

Da nun

$$\frac{4x}{k^2\pi^2 - 4x^2} = \frac{1}{k\pi - 2x} - \frac{1}{k\pi + 2x},$$

so kann man 4. ersetzen durch

$$tang\,x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + x} + \frac{1}{\frac{3\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + x} + \frac{1}{\frac{5\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{5\pi}{2} + x} + \ldots$$

Anhang.

Wir geben anhangsweise eine schärfere Ableitung der in § 4, No. 9 und § 5, No. 1 benutzten Grenzbestimmung

$$\lim \frac{F(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - F(x+\Delta x,\ y)}{\Delta y} = \frac{\partial F(x,\ y)}{\partial y},$$

die dem gleichzeitigen Verschwinden von Δx und Δy Rechnung trägt.

Die Function $f(x)$ wächst oder nimmt ab, sobald $df : dx$ positiv oder negativ ist; ist $df : dx$ stetig, so kann ein Uebergang vom Wachsthum zur Abnahme oder umgekehrt nur für solche Werthe der Variabeln eintreten, für welche $df : dx$ verschwindet.

Ein Curvenast $y = \varphi(x)$ und der Differentialquotient $d\varphi : dx$ seien stetig zwischen den Punkten P und P_1, die zu den Abscissen x und $x + \Delta x$ gehören. Der Punkt der Strecke PP_1, dessen Abscisse $x + \varepsilon\Delta x$ ist ($\varepsilon < 1$), hat die Ordinate

$$\varphi(x) + \varepsilon[\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)] = (1-\varepsilon)\,\varphi(x) + \varepsilon\varphi(x+\Delta x)\,.$$

Der Unterschied u dieser Ordinate und der zu derselben Abscisse gehörigen Curvenordinate ist

$$u = \varphi(x+\varepsilon\Delta x) - (1-\varepsilon)\,\varphi(x) - \varepsilon\varphi(x+\Delta x)\,.$$

Diese Grösse verschwindet für $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 1$; folglich giebt es einen positiven echten Bruch ε, für welchen

1. $$\frac{du}{d\varepsilon} = \frac{d\varphi(x+\varepsilon\Delta x)}{d\varepsilon} + \varphi(x) - \varphi(x+\Delta x) = 0\,.$$

Da nun

$$\frac{d\varphi(x+\varepsilon\Delta x)}{d\varepsilon} = \frac{d\varphi(x+\varepsilon\Delta x)}{dx}\cdot\Delta x\,,$$

so folgt aus 1.

2. $$\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \Delta x\cdot\frac{d\varphi(x+\varepsilon\Delta x)}{dx}\,.$$

Ersetzt man hierin x durch y und $\varphi(x)$ durch $F(x+\Delta x,\ y)$, so erhält man sofort

$$F(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - F(x+\Delta x,\ y) = \Delta y\cdot\frac{\partial F(x+\Delta x,\ y+\varepsilon\Delta y)}{\partial y}\,.$$

Dividirt man beide Seiten durch Δy und geht dann zur Grenze für verschwindende Werthe Δx und Δy über, so erhält man

$$\lim \frac{F(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - F(x+\Delta x,\ y)}{\Delta y} = \frac{\partial F(x,\ y)}{\partial y}\,.$$

Integralrechnung,

bearbeitet von

Dr. Richard Heger,

Gymnasiallehrer u. a. o. Hon.-Professor am Kgl. Polytechnikum zu Dresden.

I. Theil. Integrale realer Functionen einer realen Variabeln.

§ 1. Grundbegriffe und Grundformeln.

1. Die Grundaufgabe der Differentialrechnung ist: Zu einer gegebenen Function das Differential zu bestimmen; die Grundaufgabe der Integralrechnung ist die Umkehrung hiervon: Ein Differential $f(x)\,dx$ ist gegeben; man soll die Function bestimmen, von welcher $f(x)\,dx$ das Differential ist.

Die Function, von welcher $f(x)\,dx$ das Differential ist, nennt man das Integral von $f(x)\,dx$, geschrieben

$$\int f(x)\,dx\,.$$

Man hat daher für das Zeichen $\int f(x)\,dx$ die definirende Gleichung

1. $$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx\,.$$

Ist u irgend eine Function von x, so ist daher

2. $$\int du = u\,.$$

Aus 1. und 2. ist ersichtlich, dass die Zeichen d und $\int$ einander aufheben.

2. Die Aufgabe, das Differential einer Function zu bestimmen, hat eine eindeutig bestimmte Lösung; nicht so die Umkehrung: Aus dem Differential die ursprüngliche Function herzustellen.

Ist nämlich $dF(x) = f(x)\,dx$, so ist auch

$$d[F(x) + C] = f(x)\,dx\,,$$

wobei C eine willkürliche Constante bedeutet. Man hat daher

1. $$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,.$$

Man sieht leicht, dass unter der Form $F(x) + C$ jede Function enthalten ist, die $f(x)\,dx$ zum Differential hat. Denn ist ausser 1. auch $\int f(x)\,dx = \psi(x)$, so ist

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = f(x)\,;$$

da nun auch

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)\,,$$

so ist

$$\frac{d\psi(x) - dF(x)}{dx} = \frac{d[\psi(x) - F(x)]}{dx} = 0\,.$$

Hieraus folgt, dass die Differenz $\psi(x) - F(x)$ eine von x unabhängige Constante ist; man hat daher

$$\psi(x) - F(x) = C, \quad \text{oder} \quad \psi(x) = F(x) + C.$$

Die Function $F(x)$, welche keine willkürliche Constante enthält, bezeichnet man als ein particulares Integral von $f(x)\,dx$; und dem gegenüber $F(x) + C$ als das allgemeine Integral. Das allgemeine Integral geht daher aus einem particularen durch Hinzufügung einer willkürlichen Constanten hervor.

3. Nach No. 1 führt jede Differentialformel auf eine Integralformel. Aus den Differentialen der einfachen Functionen erhält man die Grundformeln der Integralrechnung:

1. $\displaystyle\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C,$ denn $\displaystyle d\frac{x^{m+1}}{m+1} = x^m dx;\quad m \gtrless -1,$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = lx + C,$ „ $\displaystyle dlx = \frac{dx}{x};$

3. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C,$ „ $de^x = e^x dx;$

4. $\displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x + C,$ „ $d\sin x = \cos x\, dx;$

5. $\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + C,$ „ $d(-\cos x) = \sin x\, dx;$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + C,$ „ $\displaystyle d\operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos^2 x};$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,$ „ $\displaystyle d\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x};$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sin} x + C,$ „ $\displaystyle d\operatorname{arc\,sin} x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x + C,$ „ $\displaystyle d\operatorname{arc\,tang} x = \frac{dx}{1+x^2};$

Bekanntlich ist

$$\operatorname{arc\,sin} x + \operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2}$$

und daher $\operatorname{arc\,sin} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cos} x$.

Man kann daher 8. ersetzen durch

10. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\operatorname{arc\,cos} x + C_1,$$

in Uebereinstimmung mit der Differentialformel

$$d\operatorname{arc\,cos} x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Eine ähnliche Bemerkung gilt bezüglich der Formel 9.; da man hat

$$\operatorname{arc\,tang} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cot} x,$$

so folgt aus 9.

11. $$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arc\,cot} x + C_1,$$

in Uebereinstimmung mit

$$d\operatorname{arc\,cot} x = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

In 10. und 11. kann das Zeichen C_1 wieder durch das völlig unbestimmte Zeichen C ersetzt werden.

4. Die nächste Aufgabe der Integralrechnung besteht darin, Integrale von Differentialen, die nicht mit in den Grundformeln enthalten sind, durch geschickte Substitutionen und Transformationen auf die Grundformeln zurückzuführen.

Ehe wir uns aber dazu wenden, ist eine wichtige principielle Frage zu erledigen.

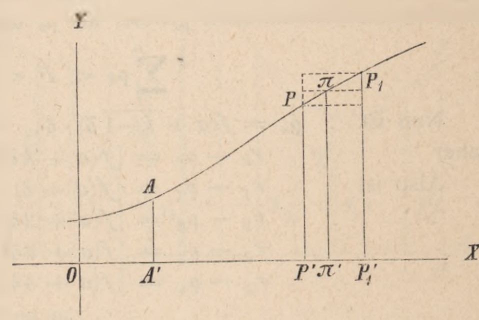
Es ist zu erwarten, — und diese Erwartung wird sich bald bestätigen — dass es Formeln $f(x)\,dx$ giebt, die in keiner Weise sich als Differentiale der bisher in der Analysis bekannten Functionen oder von Combinationen derselben ansehen lassen. In solchen Fällen wird durch das Zeichen

$$\int f(x)\,dx$$

eine neue Function definirt; wie wir in No. 2 gesehen haben, ist diese Function bis auf eine additive Constante bestimmt. In dieser Weise führt die Integralrechnung eine ungemessene Fülle neuer Functionen ein, die sich von den bisher bekannten z. Th. durch ganz neue Arten von Eigenschaften unterscheiden; wir werden einige von diesen genauer kennen lernen.

Wir wollen zunächst versuchen, eine Anschauung der Function $\int f(x)\,dx$ zu gewinnen. Wir beschränken uns dabei, wie überhaupt bei allen gegenwärtigen Untersuchungen, auf reale Werthe von x und auf reale Functionen $f(x)$; behalten uns aber vor, diese Beschränkung später wieder aufzuheben.

Wir construiren die Curve, welche in Bezug auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem die Gleichung hat $y = f(x)$; P sei ein Punkt derselben, also $OP' = x$, $P'P = f(x)$. Ein anderer Punkt desselben Curvenzugs mit kleinerer Abscisse sei A, so gelegen, dass zwischen A und P die Ordinaten sich weder unstetig ändern, noch unendlich gross oder imaginär werden, und dass, wenn A sich auf der Curve bis P bewegt, der Punkt A' immer in derselben Richtung fortschreitend nach P' gelangt. Alsdann ist die von $A'P'$, $A'A$, $P'P$ und dem Curvenbogen AP umschlossene Fläche eine endliche, eindeutig bestimmte Grösse.



(M. 498.)

Ferner sei $OP_1' = x + \Delta x$. Wir können Δx immer so klein wählen, dass die Curve von P bis P_1 nur steigt oder nur fällt. Alsdann giebt es einen zwischen P und P_1 gelegenen Punkt Π der Curve, so dass die von dem Curvenbogen begrenzte Fläche $P'PP_1P_1'$ gleich dem Rechtecke von der Breite $P'P_1'$ und der Höhe $\Pi'\Pi$ ist. Wird die Fläche $A'APP'$ mit F und demgemäss $P'PP_1P_1'$ mit ΔF bezeichnet, so ist

$$\Delta F = \Pi'\Pi \cdot \Delta x\,.$$

Ist μ ein echter Bruch, so ist $O\Pi' = x + \mu\cdot\Delta x$, daher $\Pi'\Pi = f(x + \mu\Delta x)$ und

$$\Delta F = f(x + \mu\Delta x)\cdot\Delta x,$$

oder

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x + \mu\Delta x)\,.$$

Gehen wir zur Grenze für einen verschwindenden Werth von Δx über, so erhalten wir

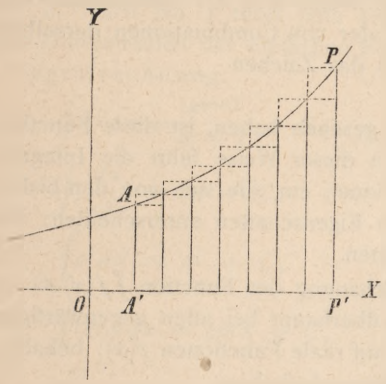
$$\lim \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim f(x + \mu \Delta x), \quad \text{folglich}$$

$$\lim \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x) \quad \text{oder} \quad dF = f(x)\,dx\,.$$

Hieraus folgt

$$\int f(x)\,dx = F + Const.$$

5. Wir wollen nun zeigen, wie die Fläche F — und damit also das Integral $\int f(x)\,dx$ — durch Begrenzung bestimmt werden kann.



(M. 499.)

Wir setzen zunächst voraus, dass die Curve von A bis P nur steigt. Theilen wir $A'P'$ in n gleiche Theile δ, so sind die zu den Theilpunkten 0, 1, 2 . . . n gehörigen Ordinaten

$f(a),\ f(a+\delta),\ f(a+2\delta),\ f(a+3\delta) \ldots f(a+\overline{n-1}\,\delta),\ f(a+n\delta) = f(x)$.

Construirt man zwischen den Ordinaten $f(a+\overline{k-1}\,\delta)$ und $f(a+k\delta)$ ein Rechteck ρ_k mit der Höhe $f(a+\overline{k-1}\,\delta)$ und eines r_k mit der Höhe $f(a+k\delta)$, so ist, da nach der Voraussetzung

$$f(a+\overline{k-1}\,\delta) < f(a+k\delta)\,,$$

der zwischen $f(a+\overline{k-1}\,\delta)$ und $fa+k\delta)$ enthaltene Flächenstreifen grösser als ρ_k und kleiner als r_k. Daher ist

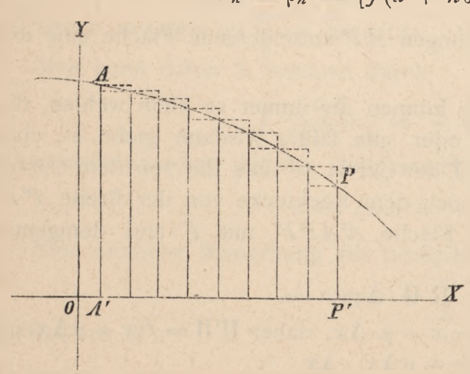
1. $$\sum_1^n \rho_k < F < \sum_1^n r_k\,.$$

Nun ist $\rho_k = f(a+\overline{k-1}\,\delta)\cdot\delta, \quad r_k = f(a+k\delta)\cdot\delta\,,$

daher $r_k - \rho_k = [f(a+k\delta) - f(a+\overline{k-1}\cdot\delta)]\,\delta\,.$

Also ist

$$\begin{aligned}
r_1 - \rho_1 &= [f(a+\delta) - f(a)]\,\delta\,,\\
r_2 - \rho_2 &= [f(a+2\delta) - f(a+\delta)]\,\delta\,,\\
r_3 - \rho_3 &= [f(a+3\delta) - f(a+2\delta)]\,\delta\,,\\
r_4 - \rho_4 &= [f(a+4\delta) - f(a+3\delta)]\,\delta\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
r_n - \rho_n &= [f(a+n\delta) - f(a+\overline{n-1}\,\delta)]\,\delta\,.
\end{aligned}$$



(M. 500.)

Hieraus folgt durch Addition

2. $\Sigma r_k - \Sigma \rho_k = [f(x) - f(a)]\,\delta\,.$

Bezeichnet μ einen positiven echten Bruch, so folgt aus 1. und 2.

3. $F = \Sigma \rho_k + \mu\,[f(x) - f(a)]\,\delta\,.$

Wenn die Curve von A bis P nur fällt, so nehmen wir dieselben Constructionen vor; da aber jetzt

$$f(a+\overline{k-1}\,\delta) > f(a+k\delta)\,,$$

so ist der zwischen diesen Ordinaten enthaltene Flächenstreifen kleiner als ρ_k und grösser als r_k; daher ist jetzt

4. $\Sigma \rho_k > F > \Sigma r_k\,;$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
\rho_1 - r_1 &= [f(a) - f(a+\delta)]\,\delta\,,\\
\rho_2 - r_2 &= [f(a+\delta) - f(a+2\delta)]\,\delta\,,\\
\rho_3 - r_3 &= [f(a+2\delta) - f(a+3\delta)]\,\delta\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\rho_n - r_n &= [f(a+\overline{n-1}\,\delta) - f(a+n\delta)]\,\delta\,.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

5. $\Sigma \rho_n - \Sigma r_n = [f(a) - f(x)]\,\delta\,.$

Wir haben daher jetzt

6. $F = \Sigma \rho_k - \mu\,[f(a) - f(x)]\,\delta\,.$

Gehen wir in 3. und 6. rechts zur Grenze für einen verschwindend kleinen Werth für δ über, und bemerken, dass, da $f(a)$ und $f(x)$ als endliche Grössen vorausgesetzt worden sind,

$$\lim\,[f(a) - f(x)]\,\delta = 0\,,$$

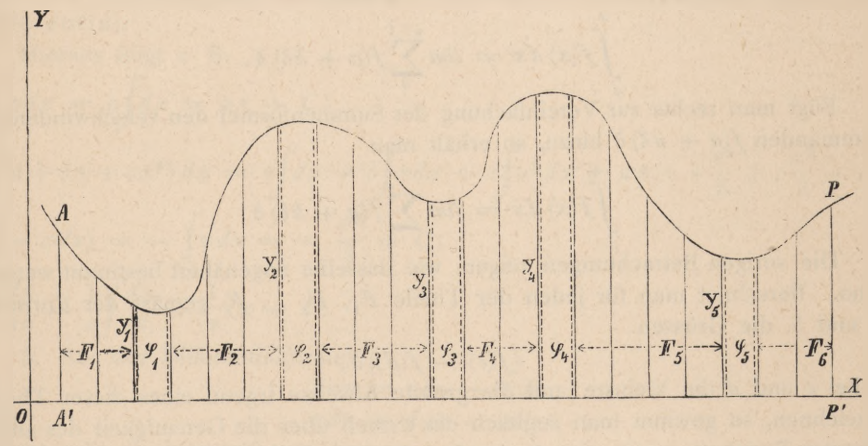
so erhalten wir

7. $F = \lim\,[f(a) + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots + f(a+\overline{n-1}\,\delta)]\,\delta\,,$

oder kürzer

$$F = \lim \sum_0^{n-1} f(a+k\delta)\,\delta\,.$$

Wenn die Curve zwischen A und P eine endliche Anzahl Male vom Steigen zum Fallen und vom Fallen zum Steigen übergeht, so nehmen wir zunächst



(M. 501.)

wieder die obige Construction vor, und zerlegen dann durch die zu gewissen Theilpunkten der Strecke $A'P'$ gehörigen Ordinaten die Fläche in solche Theile $F_1, F_2, F_3, \ldots F_i$, innerhalb deren die Curve nur steigt oder nur fällt; diese werden durch Streifen getrennt, deren jeder zwischen zwei aufeinander folgenden Ordinaten liegt. Für die Theile $F_1 \ldots F_i$ gilt dann die Formel 7. Sind die Anfangsordinaten der trennenden Streifen, deren Anzahl $i - 1$ ist,

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_{i-1}\,,$$

und die Flächen $\quad \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \ldots\ \varphi_{i-1}\,,$

so ist für jedes dieser φ

$$\varphi_m = y_m\,\delta + v_m\,,$$

wobei v_m eine positive oder negative Grösse bezeichnet, die mit δ zugleich verschwindet. Addiren wir nun die $F_1 \ldots F_i$ und schalten dazwischen an den passenden Stellen die $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{i-1}$ ein, so erhalten wir für die ganze Fläche

$$F = \lim \sum_0^{n-1} f(a+k\delta)\,\delta + \lim\,(v_1 + v_2 + \ldots + v_{i-1})\,.$$

Wenn aber bei einer endlichen Anzahl von Grössen v jede einzelne verschwindet, so verschwindet auch ihre Summe, also ist

$$lim\,(v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_{i-1}) = 0,$$

und wir erhalten somit die allgemein gültige Gleichung

$$F = lim \sum_0^{n-1} f(a + k\delta)\,\delta,$$

oder

8. $$\int f(x)\,dx = lim \sum_0^{n-1} f(a + k\delta)\,\delta + Const.$$

Eine Veränderung innerhalb der anfangs angegebenen Schranken der willkürlichen Grösse a hat, wie die Figur sofort zeigt, den Erfolg, dass die Fläche F um einen von x unabhängigen Betrag zu- oder abnimmt; und diesen kann man dann in 8. mit der willkürlichen Constanten vereinigt denken.

Den particularen Werth $lim \sum_0^{n-1} f(a + k\delta)\,\delta$ nennen wir das zwischen den Grenzen a und x genommene bestimmte Integral von $f(x)\,dx$ und bezeichnen es mit $\int_a^x f(x)\,dx$. Es gilt also die definirende Gleichung

$$\int_a^x f(x)\,dx = lim \sum_0^{n-1} f(a + k\delta)\,\delta.$$

Fügt man rechts zur Vereinfachung der Summenformel den verschwindenden Summanden $f(a + n\delta)\,\delta$ hinzu, so erhält man

9. $$\int_a^x f(x)\,dx = lim \sum_0^{n} f(a + k\delta)\,\delta.$$

Die vorigen Betrachtungen zeigen, wie dasselbe angenähert bestimmt werden kann. Berechnet man für jeden der Theile F_1, F_2 . . F_i gemäss der Formeln 2. und 5. die Grössen

$$[f(c) - f(d)]\,\delta,$$

wobei c und d die kleinste und die grösste Abscisse irgend eines dieser Theile bezeichnen, so gewinnt man zugleich ein Urtheil über die Genauigkeit des angenäherten Resultats, sowie eine Auskunft dafür, wie klein δ gewählt werden muss, damit der Fehler einen gegebenen Betrag nicht übersteigt.

In den folgenden Abschnitten werden wir uns zunächst mit solchen Integralen beschäftigen, die auf die bisher bekannten Functionen führen.

§ 2. Integral eines Polynoms und eines Produkts. Einführung einer neuen Variabeln.

1. Aus der Gleichung

$$d(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n) = du_1 + du_2 + du_3 + \ldots + du_n$$

gewinnt man durch Integration

$$\int (du_1 + du_2 + du_3 + \ldots + du_n) = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + Const.$$

Hierfür kann man setzen

$$\int (du_1 + du_2 + du_3 + \ldots + du_n) = \int du_1 + \int du_2 + \int du_3 + \ldots$$

Daher der Satz: Ein Polynom wird integrirt, indem man jedes einzelne Glied integrirt.

Durch Anwendung dieses Satzes ergiebt sich z. B.

$$\int (1 + x)\,dx = \int dx + \int x\,dx = x + \frac{x^2}{2} + C;$$

$$\int (x - x^2)\,dx = \int x\,dx - \int x^2 dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C;$$

$$\int (1 + e^x)\,dx = \int dx + \int e^x dx = x + e^x + C;$$

$$\int \frac{1 + x^2}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} + \int x\,dx = lx + \frac{x^2}{2} + C;$$

$$\int (\cos x - \sin x)\,dx = \int \cos x\,dx - \int \sin x\,dx = \sin x + \cos x + C.$$

2. Die Differentialformel

$$d(au) = a\,du$$

ergiebt durch Umkehrung

$$\int a\,du = au + Const.,$$
$$\int a\,du = a\int du.$$

Einen constanten Faktor eines Differentials kann man vor das Integralzeichen setzen; oder: um ein Integral mit einer Constanten zu multipliciren (oder zu dividiren), multiplicirt (oder dividirt) man das Differential.

Hieraus folgt z. B.

$$\int a\,dx = a\int dx = ax + C;$$

$$\int (a + bx + cx^2)\,dx = a\int dx + b\int x\,dx + c\int x^2 dx = ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^3}{3} + C;$$

$$\int (-x\,dx) = -\int x\,dx = -\frac{x^2}{2} + C;$$

$$\int \frac{dx}{ax} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{a}lx + C.$$

3. Aus der Differentialformel

$$duv = v\,du + u\,dv$$

folgt

$$v\,du = duv - u\,dv;$$

hieraus geht die Integralformel hervor

$$\int v\,du = uv - \int u\,dv.$$

Hiervon wird man mit Erfolg Gebrauch machen, wenn $\int u\,dv$ bekannt ist, oder leichter auf ein bekanntes reducirt werden kann, als $\int v\,du$; man bezeichnet diese Reduction als die Methode der theilweisen Integration.

Wir geben hierzu folgende Beispiele:

$$\int xe^x dx = \int x\,de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C;$$
$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x = x^2 e^x - \int e^x d(x^2) = e^x(x^2 - 2x + 2) + C;$$
$$\int x^3 e^x dx = \int x^3 de^x = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C.$$

Allgemein hat man

$$\int x^m e^x dx = \int x^m de^x = x^m e^x - m\int x^{m-1} e^x dx.$$

Ferner ist

$$\int lx\,dx = x\,lx - \int x\,dlx = x\,lx - \int dx = x(lx - 1) + C;$$

$$\int x\,lx\,dx = \frac{1}{2}\int lx\,d(x^2) = \frac{1}{2}x^2\,lx - \frac{1}{2}\int x^2\,dlx = \frac{x^2}{4}(2\,lx - 1) + C;$$

$$\int x^2\, lx\, dx = \frac{1}{3}\int lx\, d(x^3) = \frac{1}{3}x^3\, lx - \frac{1}{3}\int x^3\, dlx = \frac{x^3}{9}(3\, lx - 1) + C;$$

$$\int x^m\, dx\, dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1}\, lx - \frac{1}{m+1}\int x^m\, dx = \frac{1}{(m+1)^2}x^{m+1}[(m+1)\, lx - 1] + C.$$

$$\int x\cos x\, dx = \int x\, d\sin x = x\sin x - \int \sin x\, dx = x\sin x + \cos x + C;$$

$$\int x\sin x\, dx = -\int x\, d\cos x = -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + C;$$

$$\int x^2\cos x\, dx = \int x^2\, d\sin x = x^2\sin x - 2\int x\sin x\, dx;$$

$$\int x^2\sin x\, dx = -\int x^2\, d\cos x = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\, dx;$$

$$\int x^m\cos x\, dx = \int x^m\, d\sin x = x^m\sin x - m\int x^{m-1}\sin x\, dx;$$

$$\int x^m\sin x\, dx = -\int x^m\, d\cos x = -x^m\cos x + m\int x^{m-1}\cos x\, dx;$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formeln gelangt man schliesslich zu einer vollständigen Bestimmung von $\int x^m \cos x\, dx$ und $\int x^m \sin x\, dx$.

4. Ein sehr wichtiges Mittel zur Transformation von Integralen ist die Einführung einer neuen Variabeln. Um z. B. $\int (a + bx)^m dx$ zu bestimmen, setze man $a + bx = y$, also $b\,dx = dy$; durch diese Substitution erhält man

$$\int (a + bx)^m dx = \frac{1}{b}\int y^m dy = \frac{y^{m+1}}{(m+1)\,b} + C,$$
$$= \frac{1}{(m+1)\,b}(a + bx)^{m+1} + C.$$

Auf gleichem Wege ergiebt sich

$$\int \frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b}\int \frac{d(a + bx)}{a + bx} = \frac{1}{b}\, l(a + bx) + C.$$

In $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a + bx^2}}$ setze man $a + bx^2 = y$, also $2bx\,dx = dy$.

Man erhält dann

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a + bx^2}} = \frac{1}{2b}\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{b} + C,$$
$$= \frac{1}{b}\sqrt{a + bx^2} + C.$$

Ferner ist

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}.$$

Setzt man $e^x = y$, so ist $e^x dx = dy$, und daher

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx = \int \frac{dy}{1 + y^2} = arc\, tang\, y + C,$$
$$= arc\, tang(e^x) + C.$$

§ 3. Integration rationaler algebraischer Functionen.

1. Eine rationale algebraische Function der Variabeln x ist von der Form

$$f(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n}.$$

Ist die Function unecht gebrochen, ist also $m > n$, so kann man nach den Regeln der Buchstabenrechnung den Zähler durch den Nenner dividiren; man erhält dann den Quotienten

$$c_0 x^{m-n} + c_1 x^{m-n-1} + \ldots + c_{m-n-1}x + c_{m-n}$$
$$+ \frac{d_0 x^{n-1} + d_1 x^{n-2} + \ldots + d_{n-1}}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n}.$$

Man hat daher

$$\int f(x)\, dx = \int (c_0 x^{m-n} + c_1 x^{m-n-1} + \ldots + c_{m-n})\, dx$$
$$+ \int \frac{d_0 x^{n-1} + d_1 x^{n-2} + \ldots + d_{n-1}}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n}\, dx.$$

Das erste Integral rechts — das einer ganzen rationalen algebraischen Function — ist nach den bisherigen Regeln sofort ausgeführt. Es bleibt daher nur noch die Integration einer echt gebrochenen rationalen algebraischen Function zu untersuchen.

Ehe wir hierfür die allgemeinen Regeln aufstellen, mögen einige einfache Fälle erledigt werden.

1.
$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x}\right) dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\, l(1 + x) - \tfrac{1}{2}\, l(1 - x) + C$$
$$= l\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} + C.$$

2.
$$\int \frac{dx}{(x - a)(x - b)} = \frac{1}{a - b}\int \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x - b}\right) dx$$
$$= \frac{1}{a - b}\, l\frac{x - a}{x - b} + C.$$

3.
$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 11} = \int \frac{dx}{(x + 3)^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\frac{x + 3}{\sqrt{2}}}{1 + \left(\frac{x + 3}{\sqrt{2}}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\, arc\, tang\frac{x + 3}{\sqrt{2}} + C.$$

4.
$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 4} = \int \frac{dx}{(x + 3)^2 - 5} = \int \frac{dx}{(x + 3 + \sqrt{5})(x + 3 - \sqrt{5})}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\int \frac{d(x + 3 - \sqrt{5})}{x + 3 - \sqrt{5}} - \int \frac{d(x + 3 + \sqrt{5})}{x + 3 + \sqrt{5}}\right]$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}\, l\frac{x + 3 - \sqrt{5}}{x + 3 + \sqrt{5}} + C.$$

5.
$$\int \frac{x\,dx}{x^2 - 4x + 7} = \int \frac{x\,dx}{(x - 2)^2 + 3} = \int \frac{(x - 2)\, d(x - 2)}{(x - 2)^2 + 3} + \int \frac{2\, d(x - 2)}{(x - 2)^2 + 3}$$
$$= \frac{1}{2}\, l[(x - 2)^2 + 3] + \frac{2}{\sqrt{3}}\, arc\, tang\frac{x - 2}{\sqrt{3}} + C.$$

6.
$$\int \frac{(x + 5)\, dx}{x^2 - 8x + 10} = \int \frac{(x + 5)\, dx}{(x - 4)^2 - 6} = \int \frac{(x - 4)\, d(x - 4)}{(x - 4)^2 - 6} + 9\int \frac{dx}{(x - 4)^2 - 6}$$
$$= \frac{1}{2}\, l(x^2 - 8x + 10) + \frac{9}{2\sqrt{6}}\, l\frac{x - 4 - \sqrt{6}}{x - 4 + \sqrt{6}} + C.$$

7.
$$\int \frac{dx}{x^2(x + 5)} = \int \frac{1}{25}\left(\frac{5 - x}{x^2} + \frac{1}{x + 5}\right) dx$$
$$= -\frac{1}{5x} - \frac{1}{25}\, lx + \frac{1}{25}\, l(x + 5) + C.$$

$$8.\quad \int \frac{dx}{x^5(x-3)} = \int \frac{1}{243}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{x^4+3x+9x^2+27x+81}{x^5}\right)dx$$
$$= \frac{1}{243}\left[l(x-3) - lx + \frac{3}{x} + \frac{9}{2x^2} + \frac{9}{x^3} + \frac{81}{4x^4}\right] + C.$$

Wie man sieht, gelingt in allen diesen Fällen die Integration dadurch, dass man die gebrochene Function in ein Polynom von Brüchen auflöst, deren Nenner lineare Functionen von x oder (Beispiel 7. und 8.) Potenzen linearer Functionen sind; die Zähler sind in dem ersten Falle constant, im letzteren von minderem Grade als der Nenner; nur die Beispiele 3. und 5. machen eine Ausnahme, bei ihnen treten nur Nenner von der Form $z^2 + a$ auf, wobei a positiv ist. Umgekehrt sieht man, dass die Integration echt gebrochener Functionen durchführbar wäre, wenn es gelänge, jede solche Function in der hier angegebenen Weise in Partialbrüche zu zerlegen, d. i. in ein Polynom echt gebrochener Functionen, deren Nenner linear, oder quadratisch, oder Potenzen einer linearen oder quadratischen Function sind. Wir werden nun zeigen, wie diese Zerlegung in jedem Falle durchgeführt werden kann.

2. Es seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei ganze Functionen und zwar $\varphi(x)$ vom $n$ten, $\psi(x)$ von niederem Grade. Man zerlege die Function $\varphi(x)$ in ihre linearen Faktoren; dies erfolgt bekanntlich durch Auflösung der Gleichung

$$\varphi(x) = 0\,.$$

Sind $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ die Wurzeln dieser Gleichung, und ist a der Coefficient von x^n in $\varphi(x)$, so ist dann

$$\varphi(x) = a(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_n)\,.$$

Wir setzen nun zunächst voraus, dass sämmtliche ξ von einander verschieden sind, und suchen die Zahlen $A_1, A_2, \ldots A_n$ so zu bestimmen, dass

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{A_1}{x-\xi_1} + \frac{A_2}{x-\xi_2} + \frac{A_3}{x-\xi_3} + \ldots + \frac{A_n}{x-\xi_n}\,.$$

Durch Multiplication mit $\varphi(x)$ erhält man hieraus

$$\psi(x) \equiv A_1\frac{\varphi(x)}{x-\xi_1} + A_2\frac{\varphi(x)}{x-\xi_2} + \ldots + A_n\frac{\varphi(x)}{x-\xi_n}\,.$$

Ersetzt man in dieser Identität für x den besonderen Werth ξ_1, so verschwinden rechts alle Glieder vom zweiten an, da die Grössen

$$\frac{\varphi(x)}{x-\xi_2},\ \frac{\varphi(x)}{x-\xi_3},\ \ldots\ \frac{\varphi(x)}{x-\xi_n}$$

alle den Faktor $x - \xi_1$ enthalten. Für die Grösse $\varphi(x):(x-\xi_1)$ verschwinden Zähler und Nenner, der Werth dieses Quotienten wird daher $\varphi'(\xi)$ (Diff.-Rechn., § 12). Somit gewinnt man

$$\psi(\xi_1) = A_1\varphi'(\xi_1)\,,$$

und hieraus ergiebt sich der gesuchte Zähler A_1 zu

$$2.\qquad A_1 = \frac{\psi(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)}\,.$$

In gleicher Weise folgt allgemein

$$3.\qquad A_i = \frac{\psi(\xi_i)}{\varphi'(\xi_i)}\,.$$

Sind nun sämmtliche ξ real, so sind auch alle A real und man erhält, wenn man die A in 1. einsetzt und integrirt

$$4.\quad \int\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}dx = \frac{\psi(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)}l(x-\xi_1) + \frac{\psi(\xi_2)}{\varphi'(\xi_2)}l(x-\xi_2) + \ldots + \frac{\psi(\xi_n)}{\varphi'(\xi_n)}l(x-\xi_n) + C\,.$$

Sind nicht alle ξ real, so treten eine gerade Anzahl complexer ξ auf, die paarweis conjugirt sind. Wenn ξ_h und ξ_k conjugirt sind, so sind auch die zugehörigen Zähler A_h und A_k conjugirt, also von der Form $M + iN$ und $M - iN$. Ist nun

$$\xi_h = r + is\,, \quad \text{also} \quad \xi_k = r - is\,,$$

so ist

$$\frac{A_h}{x-\xi_h} + \frac{A_k}{x-\xi_k} = \frac{(A_h+A_k)x - A_h\xi_k - A_k\xi_h}{x^2 - (\xi_h+\xi_k)x + \xi_h\xi_k}\,.$$

Da nun

$$A_h\xi_k + A_k\xi_h = Mr + Ns + i(Nr - Ms) + Mr + Ns - i(Nr - Ms)$$
$$= 2(Mr + Ns)\,,$$

so folgt schliesslich

$$5.\qquad \frac{A_h}{x-\xi_h} + \frac{A_k}{x-\xi_k} = 2\cdot\frac{Mx - Mr - Ns}{x^2 - 2rx + r^2 + s^2}\,.$$

Daher ist

$$6.\quad \int\left(\frac{A_h}{x-\xi_h} + \frac{A_k}{x-\xi_k}\right)dx = 2M\int\frac{(x-r)\,dx}{(x-r)^2+s^2} - 2Ns\int\frac{dx}{(x-r)^2+s^2}$$
$$= Ml[(x-r)^2 + s^2] - 2N\,arc\,tang\,\frac{x-r}{s} + C\,.$$

3. Wir wenden uns nun zu dem Falle, dass die Function $\varphi(x)$ mehrere gleiche lineare Faktoren enthält. Es sei $(x-\xi_1)^\alpha$ ein Faktor von $\varphi(x)$, also

$$\varphi(x) = (x-\xi_1)^\alpha\varphi_1(x)\,,$$

wobei φ_1 eine Function vom Grade $(n - \alpha)$ ist. Wir versuchen nun die Zerlegung

$$1.\quad \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi(x)}{(x-\xi_1)^\alpha\varphi_1(x)} = \frac{A_0}{(x-\xi_1)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-\xi_1)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-\xi_1} + \frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)}\,.$$

Hierbei bezeichnet $\psi_1(x)$ eine Function von minderem Grade, als $\varphi_1(x)$.

Setzt man*) $x - \xi_1 = \frac{1}{z}$, also $x = \frac{1+\xi_1 z}{z}$, so wird aus 1.

$$2.\quad \frac{z^\alpha\psi\left(\frac{1+\xi_1 z}{z}\right)}{\varphi_1\left(\frac{1+\xi_1 z}{z}\right)} = A_0 z^\alpha + A_1 z^{\alpha-1} + \ldots + A_{\alpha-1}z + \frac{\psi_1\left(\frac{1+\xi_1 z}{z}\right)}{\varphi_1\left(\frac{1+\xi_1 z}{z}\right)}\,.$$

Macht man die einzelnen Theile jeder der Functionen φ_1, ψ und ψ_1 gleichnamig und vereint sie dann, so erscheinen diese Functionen als Quotienten ganzer Functionen von z von demselben Grade, den die ursprünglichen Functionen in x hatten, dividirt durch die höchste vorkommende Potenz von z. Sind also $\psi(x)$ und $\psi_1(x)$ vom Grade $n - \delta$ bez. $n - \alpha - \varepsilon$, und bezeichnen Φ_1, Ψ, Ψ_1 ganze Functionen von den Graden $n - \alpha$, $n - \delta$, $n - \alpha - \varepsilon$, so hat man

$$\varphi_1\left(\frac{1+\xi_1 z}{z}\right) = \frac{\Phi_1(z)}{z^{n-\alpha}}\,,\quad \psi\left(\frac{1+\xi_1 z}{z}\right) = \frac{\Psi(z)}{z^{n-\delta}}\,,\quad \psi_1\left(\frac{1+\xi_1 z}{z}\right) = \frac{\Psi_1(z)}{z^{n-\alpha-\varepsilon}}\,.$$

Daher wird aus 2.

$$z^\alpha\cdot\frac{\Psi(z)}{z^{n-\delta}}\cdot\frac{z^{n-\alpha}}{\Phi_1(z)} = A_0 z^\alpha + \ldots + A_{\alpha-1}z + \frac{\Psi_1(z)}{z^{n-\alpha-\varepsilon}}\cdot\frac{z^{n-\alpha}}{\Phi_1(z)}\,,$$

oder einfacher

$$3.\qquad \frac{z^\delta\Psi(z)}{\Phi_1(z)} = A_0 z^\alpha + \ldots + A_{\alpha-1}z + \frac{z^\varepsilon\Psi_1(z)}{\Phi_1(z)}\,.$$

Die Function Φ_1 kann nicht durch Annullirung einiger Coefficienten von minderem Grade als $n - \alpha$ sein; denn den Wurzeln z der Gleichung

*) Dölp, Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung, nebst den Resultaten und den zur Lösung nöthigen theoretischen Erläuterungen. Giessen 1869. pag. 81.

4. $$\frac{\Phi_1(z)}{z^{n-\alpha}} = 0$$

entsprechen die Wurzeln der Gleichung $\varphi_1(x) = 0$; davon sind aber die $n - \alpha$ Wurzeln $z = \infty$ von 4. auszunehmen, denn sie liefern $x - \xi_1 = 1 : z = 0$, also $x = \xi_1$ während nach der Voraussetzung die Function $\varphi_1(x)$ den Faktor $x - \xi_1$ nicht besitzt. Um die $n - \alpha$ Wurzeln von $\varphi_1(x) = 0$ zu erhalten, hat man also nur die Wurzeln von $\Phi_1(z) = 0$ zu ermitteln und in $x - \xi_1 = 1 : z$ einzusetzen. Verschwänden nun die Coefficienten von $z^{n-\alpha}$, $z^{n-\alpha-1}$, $z^{n-\alpha-2}$, ... $z^{n-\alpha-x}$ in $\Phi_1(z)$, so würde die Gleichung $\Phi_1(z) = 0$ k gleiche Wurzeln $z = \infty$ haben, im Widerspruche mit der Voraussetzung, wie soeben gezeigt wurde.

In ganz gleicher Weise ist ersichtlich, dass $\Psi(z)$ und $\Psi_1(z)$ nicht von minderem Grade als $n - \delta$, bez. $n - \alpha - \varepsilon$ ausfallen können; mithin ist $z^\delta\Psi(z)$ vom Grade n und $z^\varepsilon\Psi_1(z)$ vom Grade $n - \alpha$.

Man erhält daher die Darstellung 3., indem man die algebraische Division $z^\delta\Psi(z) : \Psi_1(z)$ nach fallenden Potenzen von z geordnet ausführt.

Das höchste Glied des Quotienten ist $A_0 z^\alpha$; man berechnet ihn bis zu dem Gliede $A_{\alpha-1}z$. Der Rest ist vom Grade $n - \alpha$, und ist die Function

$$z^\varepsilon \Psi_1(z).$$

Substituirt man in

4. $$\frac{z^\varepsilon \Psi(z)}{\Phi_1(z)}$$

für z rückwärts wieder den Werth $z = 1 : (x - \xi_1)$, so geht 4. in $\psi_1(x) : \varphi_1(x)$ über; somit ist nun ψ_1 bekannt. Hat nun $\varphi_1(x)$ lauter ungleiche lineare Faktoren, so wird $\psi_1(x) : \varphi_1(x)$ nach No. 2 weiter zerlegt; enthält hingegen $\varphi_1(x)$ noch mehrfache lineare Faktoren, so hat man die soeben gegebene Entwicklung zu wiederholen. Ist

$$\varphi(x) = (x - \xi_1)^\alpha \cdot (x - \xi_2)^\beta \cdot \ldots (x - \xi_r)^\rho,$$

so erhält man schliesslich

5. $$\begin{aligned}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = {} & \frac{A_0}{(x - \xi_1)^\alpha} + \frac{A_1}{(x - \xi_1)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-2}}{(x - \xi_1)^2} + \frac{A_{\alpha-1}}{x - \xi_1} \\ & + \frac{B_0}{(x - \xi_2)^\beta} + \frac{B_1}{(x - \xi_2)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-2}}{(x - \xi_2)^2} + \frac{B_{\beta-1}}{x - \xi_2} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{R_0}{(x - \xi_r)^\rho} + \frac{R_1}{(x - \xi_r)^{\rho-1}} + \ldots + \frac{R_{\rho-2}}{(x - \xi_r)^2} + \frac{R_{\rho-1}}{x - \xi_r}.\end{aligned}$$

Sind nun alle $\xi_1 \ldots \xi_r$ real, so ist mit dieser Zerlegung auch die Integration von $[\psi(x) : \varphi(x)]\,dx$ erledigt; man erhält

6. $$\begin{aligned}\int\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}dx = & - \frac{(\alpha - 1)A_0}{(x - \xi_1)^{\alpha-1}} - \frac{(\alpha - 2)A_1}{(x - \xi_1)^{\alpha-2}} - \ldots - \frac{A_{\alpha-2}}{x - \xi_1} + A_{\alpha-1}\,l(x - \xi_1) \\ & - \frac{(\beta - 1)B_0}{(x - \xi_2)^{\beta-1}} - \frac{(\beta - 2)B_1}{(x - \xi_2)^{\beta-2}} - \ldots - \frac{B_{\beta-2}}{x - \xi_2} + B_{\beta-1}\,l(x - \xi_2) \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & - \frac{(\rho - 1)R_0}{(x - \xi_r)^{\rho-1}} - \frac{(\rho - 2)R_1}{(x - \xi_r)^{\rho-2}} - \ldots - \frac{R_{\rho-2}}{x - \xi_r} + R_{\rho-1}\,l(x - \xi_\rho).\end{aligned}$$

4. Ist $\xi_1 = r + is$ und enthält φ den Faktor $(x - r - is)^\mu$, so enthält φ auch den conjugirten Faktor $(x - r - is)^\mu$; beide Faktoren geben vereint den Faktor

$$[(x - r)^2 + s^2]^\mu.$$

Es lässt sich nun nachweisen, dass dann immer eindeutig folgende Entwicklung durchgeführt werden kann

1. $$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_0 x + B_0}{[(x - r)^2 + s^2]^\mu} + \frac{A_1 x + B_1}{[(x - r)^2 + s^2]^{\mu-1}} + \ldots + \frac{A_{\mu-1}x + B_{\mu-1}}{(x - r)^2 + s^2} + \frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)},$$

wobei $\varphi_1(x)$ das Produkt der Faktoren bezeichnet, die in φ ausser $(x - r)^2 + s^2$ enthalten sind.

Multiplicirt man nämlich in 1. beide Seiten mit $[(x - r)^2 + s^2]^\mu$, so erhält man, wenn man $(x - r)^2 + s^2$ zur Abkürzung mit U bezeichnet

2. $$\begin{aligned}\frac{\psi(x)}{\varphi_1(x)} = {} & A_0 x + B_0 + (A_1 x + B_1)\,U + (A_2 x + B_2)\,U^2 + \ldots \\ & \ldots + (A_{\mu-1}x + B_{\mu-1})\,U^{\mu-1} + \frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)}\,U^\mu.\end{aligned}$$

Ersetzt man hier x durch $r + is$, so verschwinden alle Potenzen von U; nimmt die linke Seite dabei den complexen Werth $M_0 + iN_0$ an, so hat man

3. $$M_0 + iN_0 = A_0(r + is) + B_0.$$

Durch Vergleichung der realen und imaginären Theile ergiebt sich hieraus

4. $$A_0 = \frac{N_0}{s}, \quad B_0 = M_0 - \frac{r}{s}N_0.$$

Die Function $\psi(x) - \varphi_1(x)(A_0 x + B_0)$ verschwindet, wenn A_0 und B_0 die Werthe 4. haben, und x durch ξ_1 ersetzt wird; hieraus folgt, dass diese Function den Faktor $x - \xi_1$ hat; sie hat daher auch den conjugirten Faktor, und ist folglich theilbar durch das Produkt dieser beiden Faktoren, durch U. Führt man die Division aus, und bezeichnet den Quotienten mit $\chi_1(x)$, so hat man daher

$$\psi(x) - \varphi_1(x)(A_0 x + B_0) = U \cdot \chi_1(x).$$

Setzt man dies in 2. ein, so enthalten alle Glieder der Gleichung den Faktor U; nach Entfernung desselben bleibt

5. $$\begin{aligned}\frac{\chi_1(x)}{\varphi_1(x)} = {} & A_1 x + B_1 + (A_2 x + B_2)\,U + (A_3 x + B_3)\,U^2 + \ldots \\ & + (A_{\mu-1}x + B_{\mu-1})\,U^{\mu-2} + \frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)}\,U^{\mu-1}.\end{aligned}$$

Setzt man hier $x = \xi_1$, so erhält man

6. $$A_1\xi_1 + B_1 = \frac{\chi_1(\xi_1)}{\varphi_1(\xi_1)},$$

und hieraus wie bei 3. und 4. durch Sonderung des Realen und Imaginären die Grössen A_1 und B_1.

Durch wiederholte Anwendung dieses in der Ausführung zwar umständlichen, aber ganz elementaren und durchsichtigen Verfahrens gewinnt man sämmtliche A und B.

Es ist klar, dass man ein gleiches Verfahren auch an Stelle des in No. 3 gegebenen anwenden könnte.

5. Für den Fall, dass $\varphi(x)$ mehrfache complexe Faktoren hat, kommt die Integration von $(\psi : \varphi)\,dx$ daher auf die Entwicklung der Integrale hinaus

1. $$\int\frac{Ax + B}{(x - r)^2 + s^2}dx \quad \text{und} \quad 2. \quad \int\frac{Ax + B}{[(x - r)^2 + s^2]^n}dx,$$

wobei n eine ganze positive Zahl bezeichnet. Das Integral 1. liefert (vergl. No. 2, 6)

3. $$\begin{aligned}\int\frac{Ax + B}{(x - r)^2 + s^2}dx & = \int\frac{A(x - r) + (B + Ar)}{(x - r)^2 + s^2}dx \\ & = \frac{A}{2}\,l[(x - r)^2 + s^2] + \frac{B + Ar}{s}\,arc\,tang\,\frac{x - r}{s} + C.\end{aligned}$$

Für das zweite erhält man die Zerlegung

$$4.\quad \int \frac{Ax+B}{[(x-r)^2+s^2]^n}\,dx = A\int \frac{(x-r)\,dx}{[(x-r)^2+s^2]^n} + (B+Ar)\int \frac{dx}{[(x-r)^2+s^2]^n}\,.$$

Nun ist

$$5.\quad \int \frac{(x-r)\,dx}{[(x-r)^2+s^2]^n} = -\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{[(x-r)^2+s^2]^{n-1}}\,,$$

also erübrigt noch die Ausführung des Integrals

$$\int \frac{dx}{[(x-r)^2+s^2]^n}\,.$$

Führt man hier eine neue Variable durch die Gleichung ein

$$x - r = sz\,,$$

so ist $\qquad dx = s\,dz\,, \quad (x-r)^2 + s^2 = s^2(1+z^2)\,,$

und man erhält

$$6.\quad \int \frac{dx}{[(x-r)^2+s^2]^2} = \frac{1}{s}\int \frac{dz}{(1+z^2)^n}\,.$$

Wie man aus der Zusammenrechnung der rechten Seite sofort sieht, ist

$$7.\quad \int \frac{dz}{(1+z^2)^n} = \int \frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}} - \int \frac{z^2dz}{(1+z^2)^n}\,;$$

ferner erhält man durch theilweise Integration

$$8.\quad \int \frac{z^2dz}{(1+z^2)^n} = \int z\cdot\frac{zdz}{(1+z^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{z}{(1+z^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dz}{(1-z^2)^{n-1}}\,.$$

Daher ist

$$9.\quad \int \frac{dz}{(1+z^2)^n} = \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{z}{(1+z^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dz}{(1-z^2)^{n-1}}\,.$$

Durch dieselbe Formel reducirt man $\int dz:(1-z^2)^{n-1}$ auf $\int dz:(1+z^2)^{n-2}$ u. s. w., bis man zum Schluss auf

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = arc\ tang\, z + C$$

kommt.

6. Alles in No. 1 bis No. 5 Entwickelte zusammenfassend, erhalten wir somit das Ergebniss: Das Integral einer rationalen algebraischen Function lässt sich in jedem Falle durch eine endliche Anzahl von rationalen Functionen, Logarithmen und Arcustangens ausdrücken.

7. Die Anwendung der soeben entwickelten Regeln wollen wir nun an einigen Beispielen zeigen.

A.

$$\int \frac{x^3+9x^2-4x+7}{(x^2-5x+6)(x^2+5x+6)}\,dx\,.$$

Hier ist $\psi(x) = x^3+9x^2-4x+7$, $\quad \varphi(x) = (x-2)(x-3)(x+2)(x+3)$,

also $\qquad \xi_1 = 2\,, \quad \xi_2 = 3\,, \quad \xi_3 = -2\,, \quad \xi_4 = -3\,.$

Die Werthe $\varphi'(\xi_k)$ werden am zweckmässigsten nach der Formel berechnet

$$\varphi'(\xi_k) = \left[\frac{\varphi(x)}{x-\xi_k}\right]_{x=\xi_k}.$$

Man findet $\varphi'(2) = -20\,, \quad \varphi'(3) = 30\,, \quad \varphi'(-2) = 20\,, \quad \varphi'(-3) = -30.$

Ferner ist $\psi(2) = 43\,, \quad \psi(3) = 103\,, \quad \psi(-2) = 43\,, \quad \psi(-3) = 73.$

Daher hat man die Zerlegung

$$\frac{x^3+9x^2-4x+7}{(x^2-5x+6)(x^2+5x+6)} = -\frac{43}{20}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{30}{103}\cdot\frac{1}{x-3} + \frac{43}{20}\cdot\frac{1}{x+2} - \frac{73}{30}\cdot\frac{1}{x+3}\,.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\int \frac{x^3+9x^2-4x+7}{(x^2-5x+6)(x^2+5x+6)}\,dx = -\frac{43}{20}\,l(x-2) + \frac{30}{103}\,l(x-3)$$
$$+ \frac{43}{20}\cdot l(x+2) - \frac{73}{30}\cdot l(x+3) + C.$$

B.

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)(x^2-6x+13)}\,.$$

Hier ist $\psi(x) = 1\,,$

$$\varphi(x) = (x-2-i)(x-2+i)(x-3-2i)(x-3+2i)\,,$$
$$\xi_1 = 2+i\,, \quad \xi_2 = 2-i\,, \quad \xi_3 = 3+2i\,, \quad \xi_4 = 3-2i\,,$$
$$\varphi'(2+i) = 4+8i\,, \qquad \varphi'(2-i) = 4-8i\,,$$
$$\varphi'(3+2i) = -16-8i\,, \qquad \varphi'(3-2i) = -16+8i\,.$$

Man hat daher die Zerlegung

$$\frac{1}{(x^2-4x+5)(x^2-6x+1)} = \frac{1}{4+8i}\cdot\frac{1}{x-2-i} + \frac{1}{4-8i}\cdot\frac{1}{x-2+i}$$
$$- \frac{1}{16+8i}\cdot\frac{1}{x-3-2i} - \frac{1}{16-8i}\cdot\frac{1}{x-3+2i}\,.$$

Durch Vereinigung conjugirt complexer Ausdrücke erhält man

$$\frac{1}{4+8i}\cdot\frac{1}{x-2-i} + \frac{1}{4-8i}\cdot\frac{1}{x-2+i} = \frac{x}{10[(x-2)^2+1]}\,,$$
$$\frac{1}{16-8i}\cdot\frac{1}{x-3-2i} + \frac{1}{16-8i}\cdot\frac{1}{x-3+2i} = \frac{x-2}{10[(x-3)^2+4]}\,.$$

Da nun

$$\int \frac{xdx}{(x-2)^2+1} = \frac{1}{2}\,l(x^2-4x+5) + 2\,arc\ tang(x-2)\,,$$
$$\int \frac{(x-2)\,dx}{(x-3)^2+4} = \frac{1}{2}\,l(x^2-6x+13) + \frac{1}{2}\,arc\ tang\,\frac{x-3}{2}\,,$$

so folgt schliesslich

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)(x^2-6x+13)} = \frac{1}{20}\,l\,\frac{x^2-4x+5}{x^2-6x+13} + \frac{1}{5}\,arc\ tang(x-2)$$
$$- \frac{1}{20}\,arc\ tang\,\frac{x-3}{2} + C.$$

C.

$$\int \frac{x^2-3x+1}{(x-2)^3(x-3)^2}\,dx\,.$$

Hier ist $\xi_1 = 2$; die Substitution $x = \dfrac{1+2z}{z}$ liefert

$$x^2-3x+1 = \frac{1}{z^2}(-z^2+z+1)\,,$$
$$\varphi_1\left(\frac{1+2z}{z}\right) = \left(\frac{1+2z}{z}-3\right)^2 = \frac{1}{z^2}(1-z)^2\,.$$

Daher ist

$$\frac{z^6\Psi(z)}{\Phi_1(z)} = \frac{z^3(-z^2+z+1)}{(1-z)^2}\,.$$

Nun ist

$$(-z^5 + z^4 + z^3) : (z^2 - 2z + 1) = -z^3 - z^2 + \frac{z^2}{z^2 - 2z + 1}.$$

Substituirt man im Restbruche $z = 1 : (x - 2)$, so erhält man

$$\frac{z^2}{z^2 - 2z + 1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)^2} = \frac{1}{(x-3)^2}.$$

Daher hat man die Zerlegung

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{(x-2)^3 (x-3)^2} = -\frac{1}{(x-2)^3} - \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-3)^2},$$

folglich ist

$$\int \frac{x^2 - 3x + 1}{(x-2)^3 (x-3)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3}.$$

D.

$$\int \frac{x^3 + 4}{x^4 (x-1)^2} dx.$$

In diesem Falle hat man $\xi_1 = 1$, und hat daher die Substitution $x = (1 + z) : z$; sie ergiebt

$$x^3 + 4 = \frac{1}{z^3} (5z^3 + 3z^2 + 3z + 1),$$

$$\varphi_1 \left(\frac{1+z}{z}\right) = \frac{1}{z^4} (z+1)^4, \quad \text{und daher}$$

$$\frac{z^5 \Psi(z)}{\Phi_1(2)} = \frac{z^3 (5z^3 + 3z^2 + 3z + 1)}{(z+1)^4}.$$

Man erhält weiter

$$(5z^6 + 3z^5 + 3z^4 + z^3) : (z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 1) = 5z^2 - 17z + \frac{41z^4 + 83z^3 + 63z^2 + 17z}{(z+1)^4}.$$

Ersetzt man im Restbruche z wieder durch $1 : (x - 1)$, also $z + 1$ durch $x : (x - 1)$, so erhält man

$$\frac{41z^4 + 83z^3 + 63z^2 + 17z}{(z+1)^4} = \frac{17x^3 + 12x^2 + 8x + 4}{x^4}.$$

Folglich ist

$$\frac{x^3 + 4}{x^4 (x-1)^2} = \frac{5}{(x-1)^2} - \frac{17}{x-1} + \frac{17}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{12}{x^3} + \frac{4}{x^4},$$

und mithin

$$\int \frac{x^3 + 4}{x^4 (x-1)^2} dx = -\frac{5}{x-1} - 17 l \frac{x-1}{x} - \frac{8}{x} - \frac{6}{x^2} - \frac{4}{3x^3} + C.$$

E.

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)^2 (x+1)^3}.$$

Die Auflösung der Gleichung $x^2 - 2x + 5 = 0$ liefert $\xi_1 = 1 + 2i$. Um die Darstellung zu erreichen

$$\frac{1}{(x^2 - 2x + 5)^2 (x+1)^3} = \frac{A_0 x + B_0}{(x^2 - 2x + 5)^2} + \frac{A_1 x + B_1}{x^2 - 2x + 5} + \frac{\Psi_1(x)}{(x+1)^3},$$

setze man $x = 1 + 2i$ in

$$\frac{1}{(x+1)^3} = A_0 x + B_0 + (A_1 x + B_1)(x^2 - 2x + 5) + \frac{\psi_1(x)(x^2 - 2x + 5)^2}{(x+1)^3}.$$

Da $(2 + 2i)^3 = 16(i - 1)$, so erhält man

$$\frac{1}{16(i-1)} = -\frac{i+1}{32} = A_0(1 + 2i) + B_0,$$

und daher

$$A_0 = -\frac{1}{64}, \quad B_0 = -\frac{1}{64}.$$

Man bildet nun

$$1 - \varphi_1(x)(A_0 x + B_0),$$

wobei $\varphi_1(x) = (x+1)^3$, und erhält

$$1 - \varphi_1(x)(A_0 x + B_0) = \frac{1}{64}[64 + (x+1)^4] = \frac{1}{64}(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 65).$$

Dies durch $x^2 - 2x + 5$ dividirt, ergiebt den Quotienten

$$\chi_1(x) = \frac{1}{64}(x^2 + 6x + 13).$$

Daher hat man nun

$$\frac{\frac{1}{64}(x^2 + 6x + 13)}{(x+1)^3} = A_1 x + B_1 + \frac{\psi_1(x)(x^2 - 2x + 5)}{(x+1)^3}.$$

Setzt man hier wieder $x = 1 + 2i$, also $x^2 + 6x + 13 = 16(1 + i)$, so erhält man

$$-\frac{i}{64} = A_1(1 + 2i) + B_1, \quad \text{folglich } A_1 = -\frac{1}{128}, \quad B_1 = \frac{1}{128}.$$

Bildet man weiter $\chi_1(x) - \varphi_1(x)(A_1 x + B_1)$, so erhält man hierfür

$$\frac{1}{64}(x^2 + 6x + 13) - \frac{1}{128}(x+1)^3(-x+1) = \frac{1}{128}(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25).$$

Dies wieder durch $(x^2 - 2x + 5)$ dividirt, ergiebt

$$\frac{1}{128}(x^2 + 4x + 5).$$

Man hat daher

$$\frac{\frac{1}{128}(x^2 + 4x + 5)}{(x+1)^3} = \frac{\psi_1(x)}{(x+1)^3}, \quad \text{also} \quad \psi_1(x) = \frac{1}{128}(x^2 + 4x + 5).$$

Macht man noch von der Identität Gebrauch

$$x^2 + 4x + 5 = (x+1)^2 + 2(x+1) + 2,$$

so hat man schliesslich die vollständige Zerlegung

$$\frac{1}{(x^2 - 2x + 5)(x+1)^3} = -\frac{1}{64} \cdot \frac{x+1}{(x^2 - 2x + 5)^2} - \frac{1}{128} \cdot \frac{x-1}{x^2 - 2x + 5} + \frac{1}{128}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^3}\right).$$

Nun hat man

$$\int \frac{x+1}{[(x-1)^2 + 4]^2} dx = \int \frac{(x-1)\,dx}{[(x-1)^2 + 4]^2} + 2\int \frac{dx}{[(x-1)^2 + 4]^2},$$

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{[(x-1)^2 + 4]^2} = \frac{1}{2} l(x^2 - 2x + 5),$$

$$\int \frac{dx}{[(x-1)^2 + 4]^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-1)^2 + 4} - \frac{1}{4}\int \frac{(x-1)^2\,dx}{[(x-1)^2 + 4]^2},$$

$$\int \frac{(x-1)^2\,dx}{[(x-1)^2 + 4]^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{(x-1)^2 + 4} + \frac{1}{4} \operatorname{arc\,tang} \frac{x-1}{2}.$$

Daher ergiebt sich schliesslich

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^2(x+1)^3} = \frac{1}{256}\left[3l\frac{1}{x^2-2x+5} - \frac{x-1}{x^2-2x+5} - \frac{1}{2}\,arctang\,\frac{x-1}{2}\right.$$
$$\left. + 2l(x+1) - \frac{4}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}\right] + C.$$

§ 4. Integration irrationaler Functionen.

1. Die Integrale irrationaler Function lassen sich, wie wir später zeigen werden, im Allgemeinen nicht auf die bisher bekannten Functionen reduciren; nur in den einfachsten Fällen gelingt diese Reduction, und derartige Fälle sollen im gegenwärtigen Abschnitte betrachtet werden.

2. Kommt in einer irrationalen Function von x die Variable nur in einer Wurzel vor, und ist der Radicand dieser Wurzel eine ganze Potenz einer linearen Function von x, also die Function von der Form

$$F[x, \sqrt[n]{(ax+b)^m}],$$

so lässt sich das Integral

$$\int F[x, \sqrt[n]{(ax+b)^m}]\,dx$$

durch Substitution einer neuen Variabeln leicht auf das Integral einer rationalen Function reduciren. Setzt man nämlich

$$ax + b = z^n,$$

also

$$x = \frac{z^n - b}{a}, \quad dx = \frac{n}{a}z^{n-1},$$

so geht das Integral über in

$$\int F[x, \sqrt[n]{(ax+b)^m}]\,dx = \frac{n}{a}\int F\left(\frac{z^n-b}{a}, z^m\right)dz,$$

und dieses Integral kann nach den im vorigen Abschnitte gegebenen Anleitungen vollständig entwickelt werden.

Beispiel.
$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{x+1}}.$$

Man setze $x + 1 = z^3$, also $x = z^3 - 1$, $dx = 3z^2$.
Dadurch erhält man

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x+1}}dx = 3\int \frac{z^6 - 2z^3 + 1}{z}z^2\,dz = 3\int (z^7 - 2z^4 + z)\,dz$$
$$= \frac{3}{8}z^8 - \frac{6}{5}z^5 + \frac{3}{2}z^2 + C$$
$$= \frac{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}{40}[5(x+1)^2 - 16(x+1) + 20] + C.$$

3. Wir wenden uns nun zur Entwicklung des Integrals

1. $$J = \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}.$$

Man hat

2. $$a + 2bx + cx^2 = a - \frac{b^2}{c} + c\left(x + \frac{b}{c}\right)^2$$
$$= \frac{b^2 - ac}{c}\left[\frac{c^2}{b^2 - ac}\left(x + \frac{b}{c}\right)^2 - 1\right].$$

Ist nun $b^2 - ac < 0$, so muss $c > 0$ sein, da sonst der Radicand für alle realen Werthe von x negativ, die Wurzel also imaginär würde, während wir ausdrücklich uns gegenwärtig auf Integrale realer Functionen beschränken. Macht man von der Substitution Gebrauch

3. $$\frac{c}{\sqrt{ac - b^2}}\left(x + \frac{b}{c}\right) = z, \quad \text{also} \quad dx = \frac{\sqrt{ac-b^2}}{c}dz,$$

so geht das gegebene Integral über in

4. $$J = \frac{1}{\sqrt{c}}\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Nun ist bekanntlich

$$dl(z + \sqrt{1+z^2}) = \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Daher hat man

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\,l\,\frac{cx + b + \sqrt{c}\sqrt{a + 2bx + cx^2}}{\sqrt{ac - b^2}} + C.$$

Man kann den Bestandtheil $\left(-\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\sqrt{ac-b^2}\right)$ mit der Constanten verschmelzen, und erhält dann

5. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\,l[cx + b + \sqrt{c(a + 2bx + cx^2)}] + C,$$
$$b^2 - ac < 0, \quad c > 0.$$

Ist hingegen $b^2 - ac > 0$, so setzen wir in 2.

6. $$\frac{c}{\sqrt{b^2 - ac}}\left(x + \frac{b}{c}\right) = z, \quad \text{also} \quad dx = \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{c}dz,$$

und erhalten dadurch

7. $$a + 2bx + cx^2 = -\frac{b^2 - ac}{c}(1 - z^2).$$

Ist nun $c > 0$, so muss $z^2 > 1$ sein, damit $\sqrt{a + 2bx + cx^2}$ real ist. Unter dieser Beschränkung setzen wir

$$a + 2bx + cx^2 = \frac{b^2 - ac}{c}(z^2 - 1).$$

Aus der Differentialformel

$$dl(z + \sqrt{z^2 - 1}) = \frac{dx}{\sqrt{z^2 - 1}}$$

folgt nun

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\,l\,\frac{cx + b + \sqrt{c(a + 2bx + cx^2)}}{\sqrt{b^2 - ac}} + C,$$

oder, wenn man die Constante mit $\left(-\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\sqrt{b^2 - ac}\right)$ vereint,

9. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\,l[cx + b + \sqrt{c(a + 2bx + cx^2)}] + C.$$

Diese Integralformel ist daher anzuwenden,
wenn $b^2 - ac < 0$ und $c > 0$, für jedes reale x;
wenn $b^2 - ac > 0$ und $c > 0$, für $\frac{(cx+b)^2}{b^2 - ac} \geqq 1$.

Ist $c < 0$, so wird $\sqrt{a + 2bx + cx^2}$ nur real, so lange $z^2 < 1$. In diesem Falle und unter dieser Beschränkung für z ist nun

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-c}}\,arc\sin z + C,$$

also, wenn man wieder z durch x ausdrückt

$$10. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-c}} \, arc\sin \frac{cx + b}{\sqrt{b^2 - ac}} + C,$$

$$b^2 - ac > 0, \quad c < 0, \quad \frac{(cx+b)^2}{b^2 - ac} \leqq 1.$$

Ist $ac - b^2 = 0$, so sind die Substitutionen unbrauchbar, die zu den Formeln 9. und 10. führen. In diesem Falle ist

$$a + 2bx + cx^2 = c\left(x + \frac{b}{c}\right)^2.$$

Die Wurzel ist daher rational und man hat

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \int \frac{dx}{x + \frac{b}{c}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \, l\left(x + \frac{b}{c}\right) + C.$$

4. Zur Reduction des Integrals

$$\int \frac{A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} \, dx$$

dient folgender Satz*):

Die Constanten $B_0, B_1, \ldots B_{n-1}, B_n$ lassen sich immer so wählen, dass

$$1. \quad \int \frac{A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} \, dx$$

$$= (B_0 x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + \ldots + B_{n-1}) \sqrt{a + 2bx + cx^2} + B_n \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}.$$

Durch Differentiation erhält man nämlich aus 1.

$$\frac{A_0 x^n + \ldots + A_n}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = (B_0 x^{n-1} + \ldots + B_{n-1}) \frac{b + cx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}$$
$$+ [(n-1) B_0 x^{n-2} + (n-2) B_1 x^{n-3} + \ldots + B_{n-2}] \sqrt{a + 2bx + cx^2}$$
$$+ \frac{B_n}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}.$$

Multiplicirt man beide Seiten mit $\sqrt{a + 2bx + cx^2}$, so erhält man

$$A_0 x^n + \ldots + A_n = (B_0 x^{n-1} + \ldots + B_{n-1})(cx + b)$$
$$+ [(n-1) B_0 x^{n-2} + \ldots + B_{n-2}](cx^2 + 2bx + a) + B_n.$$

Vergleicht man die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x auf beiden Seiten, so erhält man zur Bestimmung der B die linearen Gleichungen

$$\begin{aligned}
A_0 &= ncB_0, \\
A_1 &= (n-1)cB_1 + (2n-1)bB_0, \\
A_2 &= (n-2)cB_2 + (2n-3)bB_1 + (n-1)aB_0, \\
A_3 &= (n-3)cB_3 + (2n-5)bB_2 + (n-2)aB_1, \\
A_4 &= (n-4)cB_4 + (2n-7)bB_3 + (n-3)aB_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{n-2} &= 2cB_{n-2} + 5bB_{n-3} + 3aB_{n-4}, \\
A_{n-1} &= cB_{n-1} + 3bB_{n-2} + 2aB_{n-3}, \\
A_n &= bB_{n-1} + aB_{n-2} + B_n.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen kann man nach einander die Zahlen $B_0, B_1, \ldots B_n$ bestimmen.

Beispiel. Für die Ermittelung von

*) Dölp, Aufgaben, pag. 90.

$$\int \frac{x^6}{\sqrt{1 + x^2}} \, dx$$

hat man in obigen Gleichungen zu setzen

$$n = 6, \quad A_0 = 1, \quad A_1 = \ldots = A_n = 0, \quad a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1,$$

daher gehen dieselben über in

$$\begin{aligned}
1 &= 6B_0, & 0 &= 3B_3 + 4B_1, \\
0 &= 5B_1, & 0 &= 2B_4 + 3B_2, \\
0 &= 4B_2 + 5B_0, & 0 &= B_5 + 2B_3,
\end{aligned}$$
$$0 = B_4 + B_6.$$

Sie ergeben $B_1 = B_3 = B_5 = 0$,

$$B_0 = \tfrac{1}{6}, \quad B_2 = -\tfrac{5}{24}, \quad B_4 = \tfrac{5}{16}, \quad B_6 = -\tfrac{5}{16}.$$

Folglich ist

$$\int \frac{x^6 \, dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \left(\frac{x^5}{6} - \frac{5x^3}{24} + \frac{5x}{16}\right) \sqrt{1 + x^2} - \frac{5}{16} \, l(x + \sqrt{1 + x^2}) + C.$$

5. Um das Integral zu ermitteln

$$\int \frac{dx}{(x - \alpha)^n \sqrt{a + 2bx + cx^2}},$$

setzen wir $\qquad x = \dfrac{1}{y} + \alpha, \quad$ also $\quad dx = -\dfrac{dy}{y^2},$

$$a + 2bx + cx^2 = \frac{1}{y^2}[c + 2(b + c\alpha)y + (a + 2b\alpha + c\alpha^2)y^2],$$

und erhalten dadurch

$$1. \quad \int \frac{dx}{(x - \alpha)^n \sqrt{a + 2bx + cx^2}} = -\int \frac{y^{n-1} \, dy}{\sqrt{c + 2(b + c\alpha)y + (a + 2b\alpha + c\alpha^2)y^2}}.$$

Ist nun $a^2 + 2b\alpha + c\alpha^2 = 0$, also $x - \alpha$ ein Faktor von $a + 2bx + cx^2$, so reducirt sich das Integral auf

$$2. \quad -\int \frac{y^{n-1} dy}{\sqrt{c + 2(b + c\alpha)y}},$$

und wird durch die Substitution

$$c + 2(b + c\alpha)y = z^2$$

in das Integral einer rationalen Function transformirt. Ist hingegen $a^2 + 2b\alpha + c\alpha^2 \gtrless 0$, so hat man 1. nach den im vorigen Abschnitte gegebenen Regeln zu entwickeln.

6. Hiermit ist nun auch das allgemeine Integral erledigt

$$\int \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}},$$

wenn $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ ganze Functionen von x bezeichnen und $\varphi(x)$ nur reale lineare Faktoren hat.

Man zerlege den Quotienten $\psi(x) : \varphi(x)$ nach den in § 3 gegebenen Regeln in eine ganze Function und in ein Polynom von Brüchen von der Form

$$\frac{A}{(x - \xi)^n}.$$

Dadurch zerfällt das vorgelegte Integral in ein Polynom von Integralen, die nach den gegebenen Regeln entwickelt werden können.

7. Alle Integrale von der Form

$$1. \quad \int F(x, \sqrt{a + 2bx + cx^2}) \, dx,$$

wobei F eine rationale algebraische Function von x und $\sqrt{a + 2bx + cx^2}$ bedeutet, können durch eine geschickte Substitution in Integrale einer rationalen Function transformirt werden.

Eine solche Substitution einer neuen Variabeln y muss die Bedingungen erfüllen, dass durch dieselbe sowol x als $\sqrt{a + 2bx + cx^2}$ rational in y ausgedrückt werden. Diese Bemerkung führt auf den Gedanken, eine Substitution von der Form zu versuchen

$$\sqrt{a + 2bx + cx^2} = A + Bx + Cy\,,$$

worin A, B, C noch zu bestimmen sind. Durch Quadriren findet man

2. $\quad a + 2bx + cx^2 = A^2 + 2ABx + 2ACy + B^2x^2 + 2BCxy + C^2y^2\,.$

Damit nun x rational in y ausgedrückt werde, muss $B^2 = c$ sein; um die Formeln zu vereinfachen nehmen wir ferner $AB = b$, also $A = b : \sqrt{c}$. Hierdurch erhält man aus 2., wenn man zur Abkürzung $b^2 - ac$ durch Δ bezeichnet

3. $$x = -\frac{\Delta + cC^2y^2 + 2b\sqrt{c}\cdot Cy}{2\sqrt{c}\,Cy}\,.$$

Hierin kann noch C beliebig gewählt werden; nimmt man $C = 2b : \sqrt{c}$, so wird $cC^2 = 2b\sqrt{c}\,C = 4b^2$ und man erhält die Formelgruppe

4. $$\begin{cases} x = -\dfrac{\Delta + 4b^2(y + y^2)}{4bcy}\,, \\[2mm] \sqrt{a + 2bx + cx^2} = -\dfrac{\Delta - 4b^2y^2}{4b\sqrt{c}\cdot y}\,, \\[2mm] dx = \dfrac{\Delta - 4b^2y^2}{4bcy^2}\,dy\,. \end{cases}$$

Diese Formeln sind nur anzuwenden, so lange c positiv ist, da sonst durch $\sqrt{c}$ imaginäre Bestandtheile eintreten würden.

Ist c negativ, so ist $\sqrt{a + 2bx + cx^2}$ für reale Werthe von x nur dann real, wenn $b^2 - ac > 0$ ist, wenn also $a + 2bx + cx^2$ reale lineare Faktoren hat.

Ist nun $a + 2bx + cx^2 = c(x - \alpha)(x - \beta)$, so setze man

5. $$c\,\frac{x - \alpha}{x - \beta} = y^2\,, \quad \text{also}$$

6. $$a + 2bx + cx^2 = c(x - \alpha)(x - \beta) = (x - \beta)^2y^2\,.$$

Aus 5. und 6. folgen die Substitutionsformeln

7. $$\begin{cases} x = \dfrac{\beta y^2 - \alpha c}{y^2 - c}\,, \\[2mm] \sqrt{a + 2bx + cx^2} = \dfrac{c(\beta - \alpha)y}{y^2 - c}\,, \\[2mm] dx = -2\,\dfrac{c(\beta - \alpha)y}{(y^2 - c)^2}\,dx\,. \end{cases}$$

Durch die Anwendung der Formeln 4. gewinnt man insbesondere, wenn $c > 0$,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = -\int\frac{dy}{\sqrt{c}\cdot y} = -\frac{1}{\sqrt{c}}\,ly$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\,\frac{-(b + cx) + \sqrt{c}\cdot\sqrt{a + 2bx + cx^2}}{\sqrt{c}} + C.$$

Rechnet man $\dfrac{1}{\sqrt{c}}\,l\sqrt{c}$ mit in die Constante, so kann man hierfür schreiben

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\,\frac{1}{-(b + cx) + \sqrt{c}\cdot\sqrt{a + 2bx + cx^2}} + C.$$

Erweitert man den Logarithmanden mit $b + cx + \sqrt{c}\,\sqrt{a + 2bx + cx^2}$, so erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\,\frac{b + cx + \sqrt{c}\,\sqrt{a + 2bx + cx^2}}{ac - b^2} + C.$$

Wird hiervon der Bestandtheil $\dfrac{1}{\sqrt{c}}\,l\,\dfrac{1}{ac - b^2}$ zur Constanten gerechnet, so bleibt

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\cdot l(b + cx + \sqrt{c}\,\sqrt{a + 2bx + cx^2}) + C,$$

in Uebereinstimmung mit No. 3, 5.

Ist $c < 0$, so ergiebt die zweite Substitution

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = -2\int\frac{dy}{-c + y^2} = -\frac{2}{\sqrt{-c}}\,arc\,tang\,\frac{y}{\sqrt{-c}} + C.$$

Ist z die Tangente eines Arcus, so ist dessen Sinus bekanntlich $\dfrac{z}{\sqrt{1 + z^2}}$, daher hat man die cyklometrische Formel

$$arc\,tang\,z = arc\,sin\,\frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}\,,$$

und folglich $\qquad arc\,tang\,\dfrac{y}{\sqrt{-c}} = arc\,sin\,\dfrac{y}{\sqrt{y^2 - c}}\,.$

Ist ferner z der Sinus eines Arcus, so ist der Sinus des doppelten Arcus $2z\sqrt{1 - z^2}$, also hat man

$$2\,arc\,sin\,z = arc\,sin\,2z\sqrt{1 - z^2}\,,$$

folglich $\qquad 2\,arc\,sin\,\dfrac{y}{\sqrt{y^2 - c}} = arc\,sin\,\dfrac{2\sqrt{-c}\cdot y}{y^2 - c}\,.$

Benutzt man hier die zweite Gleichung der Gruppe 7., sowie

$$\beta - \alpha = -\frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{c}\,,$$

so ergiebt sich

$$2\,arc\,sin\,\frac{y}{\sqrt{y^2 - c}} = -\,arc\,sin\sqrt{-\frac{c}{b^2 - ac}(a + 2bx + cx^2)}.$$

Macht man noch von der Formel Gebrauch

$$arc\,sin\,t = \frac{\pi}{2} - arc\,sin\sqrt{1 - t^2}\,,$$

und bemerkt, dass

$$1 - \left[\sqrt{-\frac{c}{b^2 - ac}(a + 2bx + cx^2)}\right]^2 = \frac{b^2 + 2bcx + c^2x^2}{b^2 - ac}\,,$$

so erhält man schliesslich

$$2\,arc\,sin\,\frac{y}{\sqrt{y^2 - c}} = arc\,sin\,\frac{cx + b}{\sqrt{b^2 - ac}} - \frac{\pi}{2}\,.$$

Daher folgt, wenn man $-\dfrac{\pi}{2}$ in die Constante rechnet

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-c}}\,arc\,sin\,\frac{cx + b}{\sqrt{(b^2 - ac)}} + C,$$

in Uebereinstimmung mit No. 3, 10.

§ 5. Integration transcendenter Functionen.

1. Die Integrale von Functionen, welche die transcendenten Functionen e^x, lx, $\sin x$, $\cos x$, $\tang x$, $\arcsin x$, $\arctang x$ enthalten, sind im Allgemeinen ebensowenig durch die bisher bekannten Functionen ausdrückbar, wie die Integrale von irrationalen Functionen; nur in einigen einfachen Fällen gelingt die Reduction auf bekannte Functionen.

2. A. Ein Integral von der Form

1. $$\int f(e^x)\,dx\,,$$

worin f eine algebraische Function bezeichnet, verwandelt man in ein Integral einer algebraischen Function durch die Substitution

$$e^x = y\,, \quad \text{also} \quad dx = \frac{dy}{y}\,;$$

denn man erhält hierdurch

1. $$\int f(e^x)\,dx = \int f(y)\,\frac{dy}{y}\,.$$

So hat man z. B.

$$\int\frac{dx}{a+be^x} = \int\frac{dy}{y(a+by)} = \int\frac{1}{a}\left(\frac{1}{y} - \frac{b}{a+by}\right)dy$$

$$= \frac{1}{a}[ly - l(a+by)] + C = \frac{1}{a}[x - l(a+be^x)] + C\,.$$

B. Für das Integral

$$\int f(e^{ax})\,dx$$

benutzt man die Substitution

$$e^{ax} = y\,, \quad \text{also} \quad dx = \frac{dy}{ay}\,,$$

und erhält so

2. $$\int f(e^{ax})\,dx = \frac{1}{a}\int f(y)\,\frac{dy}{y}\,.$$

Auf diesem Wege erhält man

$$\int\sqrt{e^{ax}+1}\,dx = \frac{1}{a}\int\sqrt{y+1}\,\frac{dy}{y}\,.$$

Substituirt man hier weiter

$$y = z^2 - 1\,, \quad dy = 2z\,dz\,,$$

so erhält man

$$\int\sqrt{e^{ax}+1}\,dx = \frac{2}{a}\int\frac{z^2\,dz}{z^2-1} = \frac{2}{a}\int\left(1 + \frac{1}{z^2-1}\right)dz$$

$$= \frac{2}{a}\left(z + \frac{1}{2}\,l\,\frac{z-1}{z+1}\right) + C$$

$$= \frac{2}{a}\left(\sqrt{e^{ax}+1} + \frac{1}{2}\,l\,\frac{\sqrt{e^{ax}+1}-1}{\sqrt{e^{ax}+1}+1}\right) + C\,.$$

Macht man noch von der Formel Gebrauch

$$\frac{1}{\sqrt{e^{ax}+1}+1} = \frac{\sqrt{e^{ax}+1}-1}{e^{ax}}\,,$$

so hat man schliesslich

$$\int\sqrt{e^{ax}+1}\,dx = \frac{2}{a}\left[\sqrt{e^{ax}+1} + l(\sqrt{e^{ax}+1}-1)\right] - x + C\,.$$

C. Das Integral

$$\int x^n e^{mx}\,dx$$

kann man zunächst dadurch vereinfachen, dass man $mx = y$ setzt; dann wird $dx = y : m$, $x^n = y^n : m^n$, und man erhält

3. $$\int x^n e^{mx}\,dx = \frac{1}{m^{n+1}}\int y^n e^y\,dy\,.$$

Ist nun n eine positive ganze Zahl, so kann dieses durch wiederholte Anwendung der theilweisen Integration vollständig entwickelt werden. Denn man hat (§ 2, No. 3)

4. $$\int y^k e^y\,dy = y^k e^y - k\int y^{k-1}e^y\,dy\,.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel erhält man

5. $$\int y^n e^y\,dy = e^y[y^k - ky^{k-1} + k(k-1)y^{k-2} - \ldots]\,.$$

Wenn in dem Integrale

6. $$\int f(x)e^{mx}\,dx$$

$f(x)$ eine ganze rationale Function von x ist, so kann man dies Integral in ein Polynom von Integralen

$$A\int x^n e^{mx}\,dx$$

zerlegen und jedes derselben nach 3. und 5. integriren.

Kürzer gelangt man auf folgendem Wege zum Ziele. Durch theilweise Integration ergiebt sich

$$\int f(x)e^x\,dx = f(x)e^x - \int f'(x)e^x\,dx\,.$$

Wendet man diese Formel wiederholt an, so findet man

7. $$\int f(x)e^x\,dx = e^x[f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) + \ldots]\,.$$

Ist n eine negative ganze Zahl, so führt folgender Weg zu einer Vereinfachung: Man erhält aus 4., wenn man $k-1$ durch k ersetzt

$$\int y^k e^y\,dy = \frac{y^{k+1}e^y}{k+1} - \frac{1}{k+1}\int y^{k+1}e^y\,dy\,.$$

Ist nun k negativ, etwa $k = -n$, so erhält man

8. $$\int\frac{e^y}{y^n}\,dy = -\frac{e^y}{(n-1)y^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int\frac{e^y}{y^{n-1}}\,dy\,.$$

Wendet man diese Reductionsformel hinreichend oft an, so gelangt man schliesslich zu dem Integrale

$$\int\frac{e^y}{y}\,dy\,,$$

das nicht weiter reducirt werden kann.

So ist

$$\int\frac{e^y}{y^4}\,dy = -\frac{e^y}{3y^3} + \frac{1}{3}\int\frac{e^y}{y^3}\,dy\,,$$

$$\int\frac{e^y}{y^3}\,dy = -\frac{e^y}{2y^2} + \frac{1}{2}\int\frac{e^y}{y^2}\,dy\,,$$

$$\int\frac{e^y}{y^2}\,dy = -\frac{e^y}{y} + \int\frac{e^y}{y}\,dy\,.$$

Daher

$$\int\frac{e^y}{y^4}\,dy = -e^y\left(\frac{1}{3y^3} + \frac{1}{6y^2} + \frac{1}{6y}\right) + \frac{1}{6}\int\frac{e^y}{y}\,dy\,.$$

D. Zur Reduction des Integrals

$$\int(x-a)^n e^x\,dx$$

setze man $x - a = y$; man erhält

9. $$\int(x-a)^n e^x\,dx = e^a\int y^n e^y\,dy\,,$$

und reducirt nun weiter nach Formel 5. oder 8., je nachdem n positiv oder negativ ist.

Für die Bestimmung von $\int \frac{e^x}{x}\,dx$, sowie anderer irreductibler Integrale ist man auf die Entwicklung in eine unendliche Reihe verwiesen (vergl. § 6).

E. Integrale von der Form

$$\int f(a^x)\,dx\,, \quad \int f(a^x)\,\varphi(x)\,dx$$

reducirt man auf die soeben betrachteten, indem man von der Identität Gebrauch macht

$$a^x = e^{x\,la}\,,$$

und die Substitution ausführt

$$x = \frac{y}{la},$$

Die gegebenen Integrale gehen dadurch über in

$$\frac{1}{la}\int f(e^y)\,dy\,, \quad \frac{1}{la}\int f(e^y)\,\varphi\left(\frac{y}{la}\right)dy\,.$$

3. Integrale von Functionen, welche ausser der Variabeln noch den natürlichen Logarithmus derselben enthalten, also von der Form sind

$$\int f(x,\, lx)\,dx\,,$$

kann man auf Integrale mit Exponentialgrössen reduciren, indem man substituirt

$$lx = y\,, \quad \text{also} \quad x = e^y\,, \quad dx = e^y dy\,.$$

Man erhält dadurch

1. $$\int f(x,\, lx)\,dx = \int f(e^y,\, y)\,e^y dy\,.$$

A. So erhält man

$$\int (lx - 2)^3\,dx = \int (y-2)^3\,e^y\,dy\,,$$

also nach No. 2, 9
$$\begin{aligned} &= e^y[(y-2)^3 - 3(y-2)^2 + 6(y-2) - 6] + C \\ &= e^y(y^3 - 9y^2 + 30y - 38) + C \\ &= x[(lx)^3 - 9(lx)^2 + 30(lx) - 38] + C\,. \end{aligned}$$

B. Ferner erhält man durch dieselbe Substitution, wenn $m \gtrless -1$,

$$\int x^m\,lx\,dx = \int e^{(m+1)y}\cdot y\,dy$$

2. $$= \frac{1}{(m+1)^2}\,e^{(m+1)y}[(m+1)\,y - 1] + C$$

$$= \frac{1}{(m+1)^2}\,x^{m+1}\,[(m+1)\,lx - 1] + C\,.$$

Dasselbe Resultat hätte man auch leicht direkt durch theilweise Integration finden können.

C. Auf letzterem Wege ergiebt sich

3. $$\int f(x)\,lx\,dx = lx\int f(x)\,dx - \int \frac{\int f(x)\,dx}{x}\,dx + C\,.$$

Ist $f(x)$ eine ganze rationale Function von x, so sind die rechts vorkommenden Integrale ausführbar; das Integral 2. ist ein besonderer Fall von Formel 3.

D. Ebenso erhält man

4. $$\int x^n l(a + bx^m)\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}\,l(a+bx^m) - \frac{bm}{n+1}\int \frac{x^{m+n}}{a+bx^m}\,dx\,.$$

E. Allgemeiner ergiebt sich

5. $$\int f(x)\,l\varphi(x)\,dx = l\varphi(x)\int f(x)\,dx - \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\left(\int f(x)\,dx\right)dx\,.$$

Ist $f(x)$ eine ganze Function und $\varphi(x)$ eine rationale, so ist das Integral vollständig ausführbar; doch führt die Formel 5. auch nicht selten in andern Fällen zum Ziele, insbesondere dann, wenn $\int f(x)\,dx$ algebraisch ist.

F. Man bemerke noch das Integral

6. $$\int \frac{lx}{x}\,dx = \frac{1}{2}\,(lx)^2 + C\,.$$

G. Macht man in $\int \frac{dx}{lx}$ die Substitution $lx = y$, so erhält man

7. $$\int \frac{dx}{lx} = \int \frac{e^y}{y}\,dy\,.$$

---

4. Integrale goniometrischer Functionen. Wir bemerken hier zunächst folgende einfache Integralformeln

1. $$\int tang\,x\,dx = \int \frac{sin\,x\,dx}{cos\,x} = -\,l\,cos\,x + C\,,$$

2. $$\int cot\,x\,dx = \int \frac{cos\,x\,dx}{sin\,x} = l\,sin\,x + C\,,$$

3. $$\int \frac{dx}{sin\,x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{sin\frac{1}{2}x\,cos\frac{1}{2}x} = \int \frac{d\frac{1}{2}x}{cos^2\frac{1}{2}x}\cdot\frac{1}{tang\frac{1}{2}x} = l\,tang\tfrac{1}{2}x + C\,,$$

4. $$\int \frac{dx}{cos\,x} = \int \frac{d\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = l\,tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) + C\,.$$

5. Integrale goniometrischer Functionen können durch verschiedene Substitutionen auf Integrale algebraischer reducirt werden. Hat man zu integriren

$$\int f(sin\,x,\; cos\,x)\,dx\,,$$

so setze man $tang\frac{1}{2}x = z$; dann ist

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2}\,, \quad sin\,x = 2\,sin\tfrac{1}{2}x\,cos\tfrac{1}{2}x = \frac{2z}{1+z^2}\,, \quad cos\,x = \frac{1-z^2}{1+z^2}\,.$$

Das Integral geht somit über in

$$\int f\left(\frac{2z}{1+z^2},\; \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{2dz}{1+z^2}\,.$$

Ist f eine rationale Function von $sin\,x$ und $cos\,x$, so hat man eine rationale Function von z zu integriren.

Man hat hiernach

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a\,sin\,x + b\,cos\,x} &= \int \frac{2dz}{2az + b - bz^2} = \frac{2}{b}\int \frac{dz}{1 + \frac{a^2}{b^2} - \left(z - \frac{a}{b}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,l\,\frac{\sqrt{a^2+b^2} - a + bz}{\sqrt{a^2+b^2} + a - bz} + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,l\,\frac{\sqrt{a^2+b^2} - a + b\,tang\frac{1}{2}x}{\sqrt{a^2+b^2} + a - b\,tang\frac{1}{2}x} + C\,. \end{aligned}$$

Dieses Integral kann auch auf folgendem Wege reducirt werden. Man kann setzen

$$a = \sqrt{a^2+b^2}\cdot cos\,\mu\,, \quad b = \sqrt{a^2+b^2}\cdot sin\,\mu\,.$$

Dadurch erhält man

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a\,sin\,x + b\,cos\,x} &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\int \frac{dx}{sin(x+\mu)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot l\,tang\,\frac{x+\mu}{2} + C\,. \end{aligned}$$

Um dieses Ergebniss mit dem vorhergehenden zu vereinen, bemerke man, dass

$$tang\,\frac{x+\mu}{2} = \frac{sin\,\frac{\mu}{2} + cos\,\frac{\mu}{2}\,tang\,\frac{x}{2}}{cos\,\frac{\mu}{2} - sin\,\frac{\mu}{2}\,tang\,\frac{x}{2}},$$

$$\sqrt{2}\cdot sin\,\frac{\mu}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{\sqrt{a^2+b^2}}}, \quad \sqrt{2}\cdot cos\,\frac{\mu}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{\sqrt{a^2+b^2}}}.$$

Hiernach erhält man

$$l\,tang\,\frac{x+\mu}{2} = l\,\frac{\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a} + \sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}\cdot tang\,\frac{x}{2}}{\sqrt{\sqrt{a^2-b^2}+a} - \sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}\cdot tang\,\frac{x}{2}}.$$

Addirt man hierzu den constanten Betrag

$$l\,\frac{\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}}{\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}},$$

so erhält man

$$l\,\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a+b\,tang\,\frac{x}{2}}{\sqrt{a^2+b^2}+a-b\,tang\,\frac{x}{2}}.$$

Allgemeiner ergiebt sich

$$\int\frac{dx}{a\,sin\,x + b\,cos\,x + c} = 2\int\frac{dz}{b+c+2az+(c-b)z^2}.$$

Für die weitere Ausführung ist zu unterscheiden, ob der Nenner im rechts stehenden Integrale in reale oder in complexe Faktoren zerfällt.

6. Ersetzt man in dem Integrale

$$\int f(sin\,x,\ cos\,x,\ tang\,x)\,dx$$

den Cosinus und die Tangente durch den Sinus, so erhält man ein Integral von der Form

$$\int\varphi(sin\,x)\,dx.$$

Setzt man nun weiter $sin\,x = z$, so ist $dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, und man erhält

$$\int\varphi(sin\,x)\,dx = \int\varphi(z)\,\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Unter Umständen ist es zweckmässiger, den Sinus und die Tangente durch den Cosinus auszudrücken; man kommt damit auf ein Integral von der Form

$$\int\psi(cos\,x)\,dx;$$

durch die Substitution $cos\,x = z$ erhält man dann

$$\int\psi(cos\,x)\,dx = -\int\psi(z)\,\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Auf diesem Wege ergiebt sich

$$\int sin^n x\,dx = \int\frac{z^n}{\sqrt{1-z^2}}\,dz.$$

Ist n eine ganze positive Zahl, so folgt nach § 4, No. 4, 1. für ein gerades n

$$\int\frac{z^n}{\sqrt{1-z^2}}\,dz = -\frac{1}{n}\left[z^{n-1} + \frac{n-1}{n-2}z^{n-3} + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}z^{n-5} + \ldots\right]\sqrt{1-z^2}$$
$$+ \frac{(n-1)(n-3)\ldots 5\cdot 3}{(n-2)(n-4)\ldots 4\cdot 2}\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}};$$

daher hat man in diesem Falle

$$\int sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\left[sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}sin^{n-3}x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}sin^{n-5}x + \ldots\right]cos\,x$$
$$+ \frac{(n-1)(n-3)\ldots 5\cdot 3}{(n-2)(n-4)\ldots 4\cdot 2}\cdot x + C.$$

Für ein ungerades n ist

$$\int\frac{z^n}{\sqrt{1-z^2}}dz = -\frac{1}{n}\left[z^{n-1} + \frac{n-1}{n-2}z^{n-3} + \ldots + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4\cdot 2}{(n-2)(n-4)\ldots 3\cdot 1}\right]\sqrt{1-z^2} + C,$$

$$\int sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\left[sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}sin^{n-3}x + \ldots + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4\cdot 2}{(n-2)(n-4)\ldots 3\cdot 1}\right]cos\,x + C.$$

7. In manchen Fällen empfiehlt es sich, in dem Integrale

$$\int f(sin\,x,\ cos\,x,\ tang\,x)\,dx$$

den Sinus und Cosinus durch die Tangente auszudrücken; man erhält dann ein Integral

$$\int\varphi(tang\,x)\,dx;$$

setzt man nun $tang\,x = z$, so erhält man

$$\int\varphi(z)\,\frac{dz}{1+z^2}.$$

Diese Transformation wird insbesondere dann von Nutzen sein, wenn φ rational ist.

Hiernach ist

$$\int\frac{dx}{a\,sin^2 x + b\,cos^2 x} = \int\frac{dz}{az^2+b}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{ab}}\,arc\,tang\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot tang\,x\right) + C, \quad \frac{a}{b} > 0$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\,l\,\frac{b+\sqrt{-ab}\cdot tang\,x}{b-\sqrt{-ab}\cdot tang\,x} + C, \quad \frac{a}{b} < 0.$$

8. Für die Entwicklung des Integrals

$$\int sin^n x\,cos^m x\,dx,$$

worin n und m positive ganze Zahlen sein mögen, kann folgender Weg eingeschlagen werden.

Ist m ungerade, $m = 2r+1$, so hat man

$$\int sin^n x\,cos^{2r+1}x\,dx = \int sin^n x(1-sin^2 x)^r\,cos\,x\,dx$$
$$= \int\left[sin^n x - \binom{r}{1}sin^{n+2}x + \binom{r}{2}sin^{n+4}x - \binom{r}{3}sin^{n+6}x + \ldots\right]cos\,x\,dx$$
$$= \frac{1}{n+1}sin^{n+1}x - \frac{1}{n+3}\cdot\binom{r}{1}sin^{n+3}x + \frac{1}{n+5}\cdot\binom{r}{2}sin^{n+5}x - \ldots + C.$$

Ist n ungerade, so setzt man

$$\int sin^{2r+1}x\,cos^m x\,dx = \int(1-cos^2 x)^r cos^m x\cdot sin\,x\,dx$$
$$= \int\left[cos^m x - \binom{r}{1}cos^{m+2}x + \binom{r}{2}cos^{m+4}x - \ldots\right]\cdot sin\,x\,dx$$
$$= -\frac{1}{m+1}\cdot cos^{m+1}x + \frac{1}{m+3}\cdot\binom{r}{1}cos^{m+3}x - \frac{1}{m+5}\cdot\binom{r}{2}cos^{m+5}x + \ldots + C.$$

Sind m und n beide gerade, $m = 2q$, $n = 2r$, so hat man

$$\int sin^{2q}x\,cos^{2r}x\,dx = \int sin^{2q}x(1-sin^2 x)^r\,dx$$
$$= \int\left[sin^{2q}x - \binom{r}{1}sin^{2q+2}x + \binom{r}{2}sin^{2q+4}x - \binom{r}{3}sin^{2q+6}x + \ldots\right]dx.$$

Hier kann jedes Glied nach No. 6 integrirt werden.

9. Sind r und n positive ganze Zahlen, so ist

$$1.\quad \int \frac{sin^{2r+1}x\,dx}{cos^n x} = \int \frac{(1-cos^2 x)^r}{cos^n x}\, sin x\, dx$$
$$= \int \left[\frac{1}{cos^n x} - \binom{r}{1}\frac{1}{cos^{n-2}x} + \binom{r}{2}\frac{1}{cos^{n-4}x} - \ldots\right] sin x\, dx .$$

Ist $n = 2q$, so erhält man hieraus bei der Integration lauter ungerade Potenzen von $cos x$; ist $n = 2q + 1$, und $q \leqq r$, so erhält man ausser geraden Potenzen von $cos x$ noch ein Glied von der Form

$$A\int \frac{sin x\, dx}{cos x} = -\, A l cos x + C .$$

Sind r und q ganz und positiv, so ist

$$2.\quad \int \frac{sin^{2r}x}{cos^{2q-1}x}\, dx = \int \frac{sin^{2r}x}{cos^{2q}x}\, cos x\, dx$$
$$= \int \frac{sin^{2r}x}{(1-sin^2 x)^q}\, d sin x .$$

Dieses Integral ist nach den Regeln für die Integration einer gebrochenen rationalen algebraischen Function (der Variabeln $sin x$) weiter zu behandeln.

Für die Entwicklung des Integrales

$$\int \frac{sin^{2r}x}{cos^{2q}x}\, dx$$

wird man von der Substitution $cos x = z$ Gebrauch machen.

Ersetzt man in diesen Integralen x durch $\frac{1}{2}\pi - x$, so erhält man Integrale von der Form

$$\int \frac{cos^m x}{sin^n x}\, dx .$$

10. Durch theilweise Integration findet man

$$\int e^{ax} sin bx\, dx = -\frac{e^{ax} cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax} cos bx\, dx ,$$
$$\int e^{ax} cos bx\, dx = \frac{e^{ax} sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax} sin bx\, dx .$$

Hieraus ergiebt sich

$$\int e^{ax} sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a sin bx - b cos bx) + C ,$$
$$\int e^{ax} cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a cos bx + b sin bx) + C ,$$

Ersetzt man x durch $-x$, so folgt

$$\int e^{-ax} sin bx\, dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(a sin bx + b cos bx) + C ,$$
$$\int e^{-ax} cos bx\, dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(a cos bx - b sin bx) + C .$$

11. Durch theilweise Integration ergiebt sich

$$\int f(x)\, arc sin x\, dx = arc sin x \int f(x) dx - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int f(x) dx ,$$
$$\int f(x)\, arc cos x\, dx = arc cos x \int f(x) dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int f(x) dx ,$$
$$\int f(x) arc tang x\, dx = arc tang x \int f(x) dx - \int \frac{dx}{1+x^2} \int f(x) dx .$$

Ist $\int f(x) dx$ algebraisch, so hat man schliesslich nur noch eine algebraische Function zu integriren.

12. Durch die Substitution

$$arc sin x = z , \quad \text{also} \quad x = sin z$$

erhält man

$$1.\quad \int f(arc sin x)\, dx = \int f(z) cos z\, dz .$$

Ebenso erhält man durch die Substitutionen

$$arc cos x = z , \quad \text{bez.} \quad arc tang x = z$$

die Reductionen

$$2.\quad \int f(arc cos x)\, dx = -\int f(z) sin z\, dz ,$$
$$3.\quad \int f(arc tang x)\, dx = \int f(z) \frac{dz}{cos^2 z} .$$

§ 6. Integration durch unendliche Reihen.

1. Hat man mit Hilfe des TAYLOR'schen Satzes die Entwicklung

$$1.\quad f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + R_n ,$$

und ist für Werthe von x, die innerhalb gewisser Grenzen liegen

$$lim R_n = 0 , \quad n = \infty ,$$

so ist zunächst

$$2.\quad \int f(x)\, dx = \int (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + R_n)\, dx$$
$$= A_0 x + \frac{1}{2} A_1 x^2 + \frac{1}{3} A_2 x^3 + \ldots + \frac{1}{n+1} A_n x^{n+1} + \int R_n dx .$$

Das Integral $\int_a^x R_n dx$ bedeutet geometrisch den Inhalt einer Fläche, welche von der Abscissenachse und von der Curve $y = R_n$ begrenzt wird, und zwar das Stück dieser Fläche, das zwischen den zu den Abscissen a und x gehörigen Ordinaten liegt. Die Abscisse a ist dabei willkürlich, sie soll nur kleiner als x sein; sie mag daher so gewählt werden, dass für alle Werthe der Variabeln von a bis x die Reihe 1. noch convergirt.

Unter dieser Voraussetzung und für einen endlichen Werth von x ist $\int_a^x R_n dx$ eine ganz im Endlichen liegende Fläche, deren Ordinaten sämmtlich verschwinden; daher verschwindet auch die Fläche und man hat

$$\int_a^x R_n dx = 0 , \quad \text{also} \quad \int R_n dx = \text{Const.}$$

Für alle Werthe von x, für welche die Reihe convergirt

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots ,$$

ist daher

$$\int f(x) dx = A_0 x + \tfrac{1}{2} A_1 x^2 + \tfrac{1}{3} A_2 x^3 + \tfrac{1}{4} A_3 x^4 + \ldots + C .$$

2. Wir benutzen diesen Satz zunächst, um einige in der Differentialrechnung gegebene Reihenentwicklungen auf einem neuen Wege abzuleiten.

A. Für jedes echt gebrochene x ist

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots , \qquad x^2 < 1 .$$

Hieraus folgt

$$\int \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots + C .$$

Da nun $\int \frac{dx}{1+x} = l(1+x) + C_1$, so ist, indem man C_1 und C vereint

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots + C.$$

Den besonderen Werth, den die Constante zur Erfüllung dieser Gleichung haben muss, bestimmt man, indem man x einen besonderen Werth beilegt, für den die Reihensumme sich leicht angeben lässt. Wir nehmen $x = 0$ und erhalten

$$0 = C, \quad \text{also}$$

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

B. Aus der Entwicklung

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots, \quad x^2 \leqq 1$$

folgt

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots + C.$$

Daher hat man

$$arc\,tang x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots + C, \quad x^2 \leqq 1.$$

Da für $x = 0$ die Reihe sowie $arc\,tang x$ verschwinden, so folgt $C = 0$, also

$$arc\,tang x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots, \quad x^2 \leqq 1.$$

C. Nach dem binomischen Satze ist

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \dots, \quad x^2 \leqq 1.$$

Hieraus folgt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \dots + C.$$

Mithin ist

$$arc\,sin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \dots C.$$

Für $x = 0$ verschwinden die Reihe und $arc\,sin x$; also ist $C = 0$ und man hat

$$arc\,sin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \dots, \quad x^2 \leqq 1.$$

3. Wenn man $f(x)$ in eine convergente Reihe nach TAYLOR entwickeln und das Integral $\int f(x)\,dx$ auf bisher bekannte Functionen reduciren kann, so dient der Satz in No. 1 dazu, die Function $f(x)$ in eine unendliche Reihe zu entwickeln. Aus der Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot x^6 + \dots, \quad x^2 \leqq 1$$

folgt durch Integration

$$l(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \dots + C.$$

Setzt man $x = 0$, so findet man $C = 0$. Also hat man die neue Reihenentwicklung

$$l(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} = \dots, \quad x^2 \leqq 1.$$

4. Die wichtigste Anwendung der Integration durch unendliche Reihen be-

steht darin, dass man durch dieselben in den Stand gesetzt ist, ein irreductibles Integral $\int f(x)\,dx$ in eine Potenzreihe zu entwickeln, sobald die Function $f(x)$ dieser Entwicklung fähig ist.

Aus der für alle Werthe von x gültigen Entwicklung

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \dots$$

folgt, ebenfalls für alle Werthe von x

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \dots$$

Die Function $e^x : x$ ist für alle endlichen von Null verschiedenen Werthe von x endlich und wird nur unendlich gross für $x = 0$. Schliessen wir diesen Werth aus, so ist für jedes endliche positive x

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx = lx + x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \dots + C.$$

Ist x negativ, so setze man $x = -y$; dann erhält man

$$e^x = e^{-y} = 1 - \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1\cdot 2} - \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \dots$$

Daher ist

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx = \int \frac{e^{-y}}{y}\,dy = ly - y + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{1\cdot 2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \dots + C.$$

Ersetzt man nun hier wieder y durch $-x$, so findet man für negative Werthe von x

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx = l(-x) + x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \dots + C.$$

5. Für alle endlichen x gilt die Reihe

$$sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \dots$$

Daher ist auch unbeschränkt

$$\frac{sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \dots$$

und mithin

$$\int \frac{sin x}{x}\,dx = x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \dots + C.$$

6. Bei dem Integrale

$$\int \frac{l(1+x)}{x}\,dx$$

muss x wegen $l(1+x)$ grösser als -1 sein. Ist nun $-1 < x < +1$, so hat man

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Daher ist

$$\int \frac{l(1+x)}{x}\,dx = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \dots + C$$
$$-1 < x < +1.$$

Ist $x > 1$, so benutze man

$$l(1+x) = lx + l\left(1 + \frac{1}{x}\right) = lx + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^4} + \dots$$

Da nun

$$\int \frac{lx}{x}\,dx = \int lx \cdot dlx = \frac{1}{2}(lx)^2 + C, \quad \text{so folgt}$$

$$\int \frac{l(1+x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}(lx)^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2^2x^2} - \frac{1}{3^2x^3} + \frac{1}{4^2x^4} - \ldots + C,$$
$$x > 1.$$

§ 7. Einfache bestimmte Integrale.

1. Unter dem bestimmten Integrale

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

verstehen wir nach § 1, No. 5 die Fläche, welche von der Curve $y = f(x)$, der Abscissenachse und den zu den Abscissen a und x gehörigen Ordinaten eingeschlossen wird, unter der Voraussetzung, dass $x > a$ und dass $f(x)$ innerhalb der Grenzen a und x nicht unendlich wird. Wir haben gesehen, dass dieses bestimmte Integral ein particularer Werth des vollständigen (unbestimmten) Integrals

$$\int f(x)\,dx$$

ist; ist daher

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C,$$

so geht das bestimmte Integral

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

aus $\varphi(x) + C$ hervor, indem man der Constanten C einen geeigneten besonderen Werth C_1 ertheilt, so dass man hat

1. $$\int_a^x f(x)\,dx = \varphi(x) + C_1.$$

Nun folgt unmittelbar aus der Definition, dass $\int_a^x f(x)$ verschwindet, wenn man x den besonderen Werth a ertheilt; daher ist

2. $$0 = \varphi(a) + C_1.$$

Durch Subtraction folgt nun aus 1. und 2.

3. $$\int_a^x f(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(a).$$

In dieser Gleichung erscheint nun x in doppelter Bedeutung. Insofern es in $f(x)\,dx$ auftritt, soll man sich unter x die veränderliche Abscisse denken, die von einem gegebenen Anfangswerthe a bis zu einem unbestimmt gelassenen Endwerthe wächst, und dann bedeutet wieder x diesen Endwerth, und tritt in dieser Bedeutung als obere Grenze an dem Zeichen $\int_a^x$ sowie auf der rechten Seite in $\varphi(x)$ auf.

Will man die Unbestimmtheit des x in der letzteren Bedeutung aufheben, so wird man zweckmässig ein anderes Zeichen dafür setzen, etwa b, und hat daher

4. $$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a),$$
$$b > a.$$

Um die Beschränkung $b > a$ aufheben zu können, benutzen wir als **Definition des bestimmten Integrals** die Gleichung § 1, No. 5, 9

$$\int_a^b f(x)\,dx = lim \sum_0^n f(a + k\delta)\,\delta,$$

und halten nur daran fest, dass $f(x)$ für keine Abscisse, die zwischen a und b liegt, unendlich gross wird. Hierbei ist

$$\delta = \frac{b-a}{n},$$

also ist

5. $$\int_a^b f(x)\,dx = lim \sum_0^n f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n}.$$

Nun ist, wie man sofort sieht,

$$a + k\frac{b-a}{n} = b + (n-k)\frac{a-b}{n}.$$

Setzt man $n - k = k'$, so geht k' von n bis 0, wenn k die Werthe von 0 bis n durchläuft. Daher hat man

$$\int_a^b f(x)\,dx = lim \sum_n^0 f\left(b + k' \cdot \frac{a-b}{n}\right) \frac{b-a}{n}.$$

Kehrt man hier die Ordnung der Summanden um, so hat man

$$\int_a^b f(x)\,dx = lim \sum_0^n f\left(b + k' \cdot \frac{a-b}{n}\right) \frac{b-a}{n}$$
$$= - lim \sum_0^n f\left(b + k' \cdot \frac{a-b}{n}\right) \frac{a-b}{n}.$$

Vergleicht man die rechte Seite mit 5., so sieht man, dass gemäss dieser Definition

$$lim \sum_0^n f\left(b + k' \cdot \frac{a-b}{n}\right) \cdot \frac{a-b}{n} = \int_b^a f(x)\,dx.$$

Daher hat man schliesslich die Gleichung

6. $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Dieselbe lehrt den Satz: **Vertauscht man die Grenzen eines bestimmten Integrals, so wechselt das Integral das Vorzeichen.**

Aus der für $b > a$ gültigen Gleichung 4.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

folgt nun mit Hülfe der Gleichung 6.

$$\int_b^a f(x)\,dx = -[\varphi(b) - \varphi(a)] = \varphi(a) - \varphi(b).$$

Mithin gilt die Gleichung 4. unabhängig davon, ob $a \gtrless b$.

2. Ist $a < b < c$, so folgt aus der geometrischen Bedeutung des bestimmten Integrals die Gleichung

1. $$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Hieraus ergiebt sich weiter

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Benutzt man nach No. 1

$$-\int_b^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx\,,$$

so erhält man

2. $$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Der Satz 1. gilt also auch, wenn man die Grenzen b und c gegen einander vertauscht.

Ferner folgt aus 1.

$$-\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx\,, \quad \text{also ist}$$

3. $$\int_b^a f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx\,.$$

Der Satz 1. gilt daher auch, wenn man a und b vertauscht.

Aus der Anordnung acb (2) erhält man durch Vertauschung der ersten und zweiten Grenze (nach 3) die Reihenfolge cab, hieraus durch Vertauschung der zweiten und dritten cba, und daraus endlich durch Vertauschung der ersten und zweiten bca. Hieraus ergiebt sich, dass der Satz

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

unabhängig davon gilt, wie die drei Zahlen a, b, c der Grösse nach geordnet sind.

3. Nicht selten hat man es mit Functionen $f(x)$ zu thun, welche die Eigenschaft haben, dass

$$f(a) = 0\,, \quad \text{und} \quad f(a+z) = -f(a-z)\,.$$

Hierher gehören z. B. alle ungeraden Potenzen von $a - x$; denn es ist

$$(a-a)^{2n+1} = 0\,, \quad [a-(a+z)]^{2n+1} = -[a-(a-z)]^{2n+1}\,;$$

ferner alle goniometrischen Functionen von x. Man hat z. B.

$$tang\,0 = 0\,, \quad tang\,z = -tang(-z)\,,$$

$$cos\frac{\pi}{2} = 0\,, \quad cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = -cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right).$$

Für derartige Functionen ist

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)\,dx = 0\,.$$

Ersetzt man nämlich x durch $a + z$, also dx durch dz, so entsprechen den Werthen $a - b$ und $a + b$ von x die Werthe $(-b)$ und b der neuen Veränderlichen z; daher hat man

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)\,dx = \int_{-b}^{b} f(a+z)\,dz\,.$$

Nun ist weiter

1. $$\int_{-b}^{b} f(a+z)\,dz = \int_{-b}^{0} f(a+z)\,dz + \int_{0}^{b} f(a+z)\,dz\,.$$

Ferner ist

$$\int_{-b}^{0} f(a+z)\,dz = -\int_{0}^{-b} f(a+z)\,dz\,.$$

Ersetzt man rechts z durch $-z$, also dz durch $-dz$, so erhält man

$$\int_{-b}^{0} f(a+z)\,dz = \int_{0}^{b} f(a-z)\,dz\,.$$

Nun ist aber nach der Voraussetzung

$$f(a-z) = -f(a+z)\,;$$

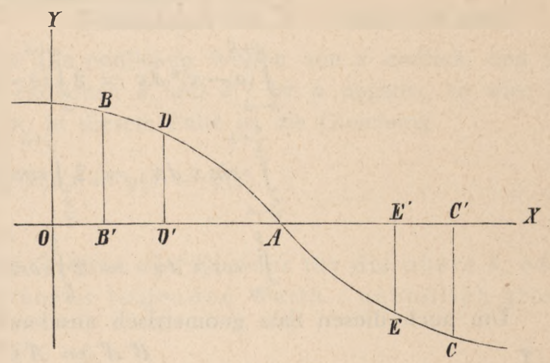
daher hat man

$$\int_{-b}^{0} f(a+z)\,dz = -\int_{0}^{b} f(a+z)\,dz\,.$$

Setzt man dies in 1. ein, so ergiebt sich: Ist $f(a) = 0$ und $f(a+z) = -f(a-z)$, so ist

$$\int_{a-b}^{a+b} f(z)\,dz = 0\,.$$

Diesen Satz kann man geometrisch leicht erläutern.



(M. 502.)

Die Curve $y = f(x)$ schneidet die Abscissenachse in dem zur Abscisse $x = a$ gehörigen Punkte A. Nach der Voraussetzung $f(a+z) = -f(a-z)$ sind die Ordinaten, welche zu zwei gleichweit von A liegenden Punkten D' und E' der Abscissenachse gehören, entgegengesetzt gleich, $D'D = -E'E$; ist daher $B'A = -AC' = b$, so sind die Figuren $BB'A$ und $CC'A$ congruent.

Da nun aber zu negativen Ordinaten negative Flächen gehören, so folgt, dass die Flächen $BB'A$ und $AC'C$ entgegengesetzt gleich sind, mithin verschwindet ihre Summe, es ist also

$$\int_{a-b}^{a+b} f(z)\,dz = 0\,.$$

Als Beispiele hierzu haben wir:

$$\int_{-b}^{b} (Ax^5 + Bx^3 + Cx)\,dx = 0\,,$$

$$\int_{-b}^{b} sin x\,dx = 0\,,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}-b}^{\frac{\pi}{2}+b} cos x\,dx = 0\,,$$

$$\int_{-b}^{b} arc\,sin x\,dx = 0\,.$$

4. Hat die Curve $y = f(x)$ eine zur Y-Achse im Abstande a parallele Symmetrieachse, ist also

$$f(a+z) = f(a-z)\,,$$

und nimmt man an dem Integrale

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)\,dx$$

dieselbe Substitution und Zerlegung vor, wie in No. 3, so erhält man

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)\,dx = \int_{-b}^{0} f(a+z)\,dz + \int_0^b f(a+z)\,dz = \int_0^b f(a-z)\,dz + \int_0^b f(a+z)\,dz .$$

Daher ist jetzt

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)\,dx = 2\int_a^{a+b} f(x)\,dx .$$

Die Eigenschaft $f(a+z) = f(a-z)$ besitzen alle geraden Potenzen von $(a-x)$; ferner die goniometrischen Functionen Sinus und Cosinus, denn es ist

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

$$\cos x = \cos(-x).$$

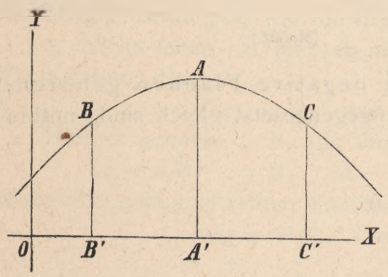
Man hat daher z. B. die Reductionen:

$$\int_{a-b}^{a+b} (a-x)^2\,dx = 2\int_a^{a+b} (a-x)^2\,dx ,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}-b}^{\frac{\pi}{2}+b} \sin x\,dx = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+b} \sin x\,dx ,$$

$$\int_{-b}^{b} \cos x\,dx = 2\int_0^b \cos x\,dx .$$

Um auch diesen Satz geometrisch anschaulich zu machen, sei $OA' = a$, $B'A' = A'C' = b$; dann sind die Flächen $BB'A'A$ und $AA'C'C$ gleich und es ist daher $BB'C'C = 2AA'C'C$, also



(M. 503.)

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)\,dx = 2\int_a^{a+b} f(x)\,dx .$$

5. Enthält $f(x)$ eine von den Grenzen a und b unabhängige Grösse γ, so ist

$$\int_a^b f(x,\gamma)\,dx$$

eine Function von γ. Setzen wir daher

$$\int_a^b f(x,\gamma)\,dx = F(\gamma),$$

so ist

$$\frac{dF(\gamma)}{d\gamma} = \lim\left[\int_a^b f(x,\gamma+\Delta\gamma)\,dx - \int_a^b f(x,\gamma)\,dx\right] : \Delta\gamma .$$

Nun ist

$$\int_a^b f(x,\gamma+\Delta\gamma)\,dx - \int_a^b f(x,\gamma)\,dx = \int_a^b [f(x,\gamma+\Delta\gamma) - f(x,\gamma)]\,dx .$$

Folglich hat man

$$\frac{dF(\gamma)}{d\gamma} = \lim \int_a^b \frac{f(x,\gamma+\Delta\gamma) - f(x,\gamma)}{\Delta\gamma}\,dx$$

$$= \int_a^b \lim \frac{f(x,\gamma+\Delta\gamma) - f(x,\gamma)}{\Delta\gamma}\,dx = \int_a^b \frac{df(x,\gamma)}{d\gamma}\,dx .$$

Daher hat man die Gleichung

$$\frac{d\int_a^b f(x,\gamma)\,dx}{d\gamma} = \int_a^b \frac{df(x,\gamma)}{d\gamma}\,dx .$$

Wir werden von derselben wiederholt Gebrauch machen, um aus einfacheren Integralen minder einfache abzuleiten.

6. Wir wenden das soeben Mitgetheilte auf einige Beispiele an.

Ist $n \gtrless -1$, sowie $a > 0$, $b > 0$, so ist

1. $$\int_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}) .$$

Ist $n > 0$, so bleibt x^n für alle endlichen Werthe von x endlich, und die Formel 1. gilt daher für alle endlichen a und b. Ist n negativ, so wird x^n unendlich gross, wenn $x = 0$ ist; in diesem Falle ist die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

nicht unbeschränkt anwendbar.

Wird $f(x)$ für die untere Grenze $a (< b)$, oder für die obere b, oder für einen zwischen den Grenzen liegenden Werth c unendlich gross, so verstehen wir unter

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

den Grenzwerth, gegen welchen das Integral

$$\int_{a+\delta}^b f(x)\,dx, \quad \text{bez.} \quad \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx$$

bez. die Summe

$$\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

für verschwindende Werthe der positiven Grössen δ und ε convergiren.

Demnach ist, wenn a eine negative, b eine positive Zahl bezeichnen

$$\int_0^b x^n\,dx = \lim \int_\delta^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - \lim \delta^{n+1}),$$

$$\int_a^b x^n\,dx = \lim\left(\int_a^{-\delta} x^n\,dx + \int_\varepsilon^b x^n\,dx\right) = \frac{1}{n+1}[b^{n+1} - a^{n+1} + \lim(-\delta)^{n+1} - \lim \varepsilon^{n+1}].$$

Ist nun $n > -1$, so ist $n+1 > 0$, und daher

$$\lim(-\delta)^{n+1} = \lim \varepsilon^{n+1} = 0,$$

also ist

$$\int_0^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}b^{n+1}, \quad \int_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1});$$

die Formel 1. gilt also für alle Werthe von a und b, wenn $n > -1$.

Ist hingegen $n < -1$, so ist $n+1 < 0$ und

$$\lim(-\delta)^{n+1} = \infty, \quad \lim \varepsilon^{n+1} = \infty .$$

Daher ist in diesem Falle

$$\int_0^{\delta} x^n\,dx = -\infty\,, \quad \int_a^0 x^n\,dx = \infty\,.$$

Das von der negativen Grenze a bis zur positiven b genommene Integral ist die Differenz zweier unendlich grossen Werthe; da δ und ε unabhängig von einander der Grenze Null sich nähern, so ist diese Differenz **unbestimmt**.

Für $n = 1$ und positive Werthe von a und b hat man

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = l\,\frac{b}{a}\,.$$

Geht man zur Grenze $a = 0$ über, so erhält man

$$\int_0^b \frac{dx}{x} = \infty\,.$$

7. Aus dem unbestimmten Integrale

$$\int e^{mx}\,dx = \frac{1}{m}\,e^{mx} + C$$

ergiebt sich das bestimmte

$$\int_a^b e^{mx}\,dx = \frac{1}{m}\left(e^{mb} - e^{ma}\right).$$

Insbesondere ist

$$\int_0^1 e^{mx}\,dx = \frac{1}{m}\left(e^{m} - 1\right),$$

$$\int_0^a e^{-x}\,dx = 1 - e^{-a}\,.$$

Geht man zur Grenze $a = \infty$ über, so ergiebt sich

1. $$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 1\,.$$

Aus der Reduction

$$\int x^m e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}\,x^m e^{-ax} + \frac{m}{a}\int x^{m-1} e^{-ax}\,dx$$

folgt, wenn m und a positiv sind,

2. $$\int_0^{\infty} x^m e^{-ax}\,dx = \frac{m}{a}\int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-ax}\,dx\,.$$

Denn $x^m e^{-ax}$ verschwindet, wenn $x = 0$; dass diese Grösse auch für $x = \infty$ verschwindet, erkennt man an der Reihenentwicklung

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{a^2 x^2}{1\cdot 2} + \frac{a^3 x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$$

die auch für $x = \infty$ gilt; man erhält hiernach

$$x^m e^{-ax} = 1 : \left(\frac{1}{x^m} + \frac{a}{x^{m-1}} + \frac{a^2}{2!\,x^{m-2}} + \ldots + \frac{a^m}{m!} + \frac{a^{m+1} x}{(m+1)!} + \ldots\right).$$

Die ersten m Glieder des Divisors verschwinden für $x = \infty$; das $(m+1)$te und alle folgenden werden unendlich gross; daher verschwindet der Quotient.

Ist nun m eine positive ganze Zahl, so gewinnt man durch wiederholte Anwendung von 2.

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-ax}\,dx = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{a^m}\int_0^{\infty} e^{-ax}\,dx\,.$$

Ersetzt man rechts ax durch z, so erhält man

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-z}\,dz\,.$$

Daher hat mit Rücksicht auf 1.

3. $$\int_0^{\infty} x^m e^{-ax}\,dx = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{a^{m+1}}\,, \quad a > 0\,.$$

Ist m eine positive gemischte Zahl, die aus der ganzen Zahl q und dem echten Bruche r besteht, so kommt man durch wiederholte Anwendung der Formel 2. auf die Reduction

4. $$\int_0^{\infty} x^m e^{-ax}\,dx = \frac{m(m-1)\ldots(m-q)}{a^{q+1}}\int_0^{\infty} x^r e^{-ax}\,dx\,.$$

8. Das unbestimmte Integral

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\,arc\,tang\,\frac{x}{a} + C$$

liefert die bestimmten

1. $$\int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{4a}\,,$$

2. $$\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2a}\,.$$

Ersetzt man im letztern Integral a^2 durch b, so erhält man

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{b + x^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{b}}\,.$$

Differenzirt man dies $(n-1)$ mal nach b und macht dabei von den Formeln Gebrauch

$$\frac{d^{n-1}(b + x^2)^{-1}}{db^{n-1}} = (-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\,\ldots\,(n-1)\cdot\frac{1}{(b + x^2)^n}$$

$$\frac{d^{n-1} b^{-\frac{1}{2}}}{db^{n-1}} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\,\ldots\,(2n-3)}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{b^{2n-1}}}$$

so erhält man, wenn man schliesslich wieder b durch a^2 ersetzt

3. $$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\,\ldots\,(2n-3)}{2^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,\ldots\,(n-1)}\cdot\frac{\pi}{a^{2n-1}}\,.$$

9. Durch theilweise Integration findet man

$$\int sin^m x\,dx = -\,sin^{m-1}x\,cos\,x + (m-1)\int cos^2 x\,sin^{m-2} x\,dx\,.$$

Ersetzt man im letzten Integrale $cos^2 x$ durch $1 - sin^2 x$, so erhält man

$$\int sin^m x\,dx = -\,sin^{m-1}x\,cos\,x + (m-1)\int sin^{m-2}x\,dx - (m-1)\int sin^m x\,dx,$$

daher ist

$$\int sin^m x\,dx = -\frac{1}{m}\,sin^{m-1}x\,cos\,x + \frac{m-1}{m}\int sin^{m-2}x\,dx\,.$$

Führt man hier die Integrationsgrenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ ein, so erhält man, sobald $m > 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^m x\,dx = \frac{m-1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{m-2}x\,dx\,.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Reduction gelangt man, je nachdem m gerade oder ungerade ist, schliesslich zu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}\,, \quad \text{oder} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\,x\,dx = 1\,.$$

Daher erhält man für ein gerades m

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^m x\,dx = \frac{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots 3\cdot 1}{m(m-2)(m-4)\ldots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\,;$$

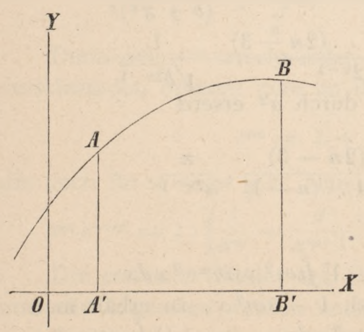
für ein ungerades m

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^m x\,dx = \frac{(m-1)(m-3)\ldots 4\cdot 2}{m(m-2)\ldots 5\cdot 3}\,.$$

Ersetzt man $sin\,x$ durch z, so ist $cos\,x\,dx = dz$, also $dx = dz : \sqrt{1-z^2}$, und den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ für x entsprechen für z die Grenzen 0 und 1. Vertauscht man nach der Substitution wieder die Buchstaben z und x, da, wie man sieht, die Bezeichnung der Integrationsvariabeln bei einem bestimmten Integral zwischen constanten Grenzen ganz willkürlich ist, so erhält man anstatt 1. und 3. die Integralformeln

3. $$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \dfrac{(m-1)(m-3)\ldots 3\cdot 1}{m(m-2)\ldots 4\cdot 2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & m \text{ gerade} \\ \dfrac{(m-1)(m-3)\ldots 4\cdot 2}{m(m-2)\ldots 3\cdot 1}, & m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

§ 8. Berechnung von ebenen Flächen, Curvenbogen, Raumtheilen und unebenen Flächen durch einfache bestimmte Integrale.



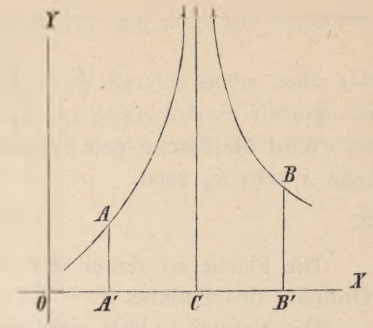
(M. 504.)

1. Wenn der Curvenzug (Fig. 504) $y = f(x)$ zwischen Punkten A und B, deren Abscissen a und b sind, stetig verläuft, und so beschaffen ist, dass, während ein Punkt P auf der Curve sich von A und B so bewegt, dass jeder Curvenpunkt nur einmal durchlaufen wird, die Horizontalprojection P' von P immer in derselben Richtung von A' nach B' gelangt, so ist die Fläche $A'ABB'$ (§ 1, No. 5)

1. $$F = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Wird die Ordinate für eine zwischen a und b liegende Abscisse $OC = c$ unendlich gross, so ergiebt sich die Fläche

2. $$F = lim\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + lim\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\,.$$



(M. 505.)

Ist die Gleichung $y = f(x)$ auf ein schiefwinkeliges Coordinatensystem bezogen mit dem Achsenwinkel α, so ist der zu Δx gehörige, der Ordinatenachse parallele Flächenstreifen zwischen den Grenzen enthalten

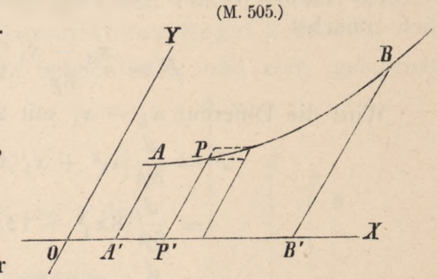
$$y\,sin\,\alpha\,\Delta x < \Delta F < (y + \Delta y)\,sin\,\alpha\cdot\Delta x\,.$$

Also ist

$$y\,sin\,\alpha < \frac{\Delta F}{\Delta x} < (y + \Delta y)\,sin\,\alpha\,.$$

Geht man zur Grenze $\Delta x = 0$ über, so erhält man

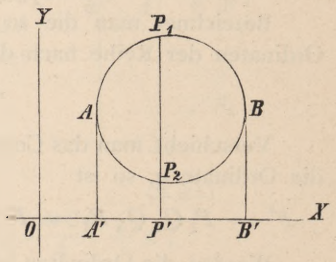
$$\frac{dF}{dx} = y\,sin\,\alpha\,,$$



(M. 506.)

mithin für die Fläche $AA'B'B$ (unter übrigens gleichen Voraussetzungen, wie oben)

3. $$F = sin\,\alpha\int_a^b y\,dx\,.$$



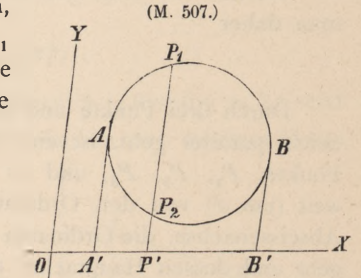
(M. 507.)

Ist in rechtwinkeligen Coordinaten $y = f(x)$ die Gleichung einer geschlossenen Curve, die von den Normalen zur Abscissenachse in zwei Punkten getroffen wird, so bestimme man zunächst auf analytisch-geometrischem Wege die Abscissen a und b der beiden die Curve tangirenden Ordinaten, zwischen denen die Curve liegt. Bezeichnet nun y_1 die zu einer Abscisse x gehörige grössere, y_2 die zugehörige kleinere Ordinate, so ist die gesuchte Fläche (Fig 507)

$$F = \int_a^b y_1\,dx - \int_a^b y_2\,dx\,,$$

mithin

4. $$F = \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx\,.$$



(M. 508.)

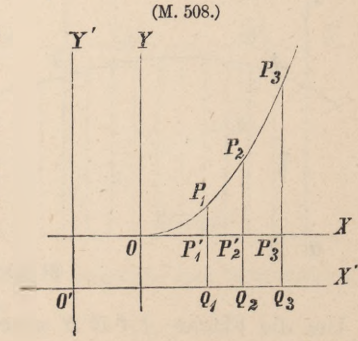
Für schiefwinkelige Coordinaten erhält man (Fig. 508)

5. $$F = sin\,\alpha\cdot\int_a^b (y_1 - y_2)\,dx\,.$$

2. Eine Parabel, deren Achse in die Y-Achse und deren Scheitel in den Nullpunkt fällt, hat die Gleichung

$$y = \frac{x^2}{2p}\,.$$

Daher ist die Fläche $P_1'P_1P_3P_3'$



(M. 509.)

1. $$F = \int_{x_1}^{x_3} \frac{x^2}{2p}\,dx = \frac{1}{6p}(x_3^3 - x_1^3).$$

Wird die Fläche vom Scheitel an gerechnet, so ist $x_1 = 0$, daher, und wenn man x statt x_3 setzt,

2. $$F = \frac{x^3}{6p} = \frac{1}{3}xy.$$

Die Fläche ist daher der dritte Theil des Rechtecks aus der Abscisse und Ordinate des Punktes P.

Die Formel 1. lässt eine bemerkenswerthe Umgestaltung zu. Man hat nämlich zunächst

$$F = \frac{x_3 - x_1}{6p}(x_1^2 + x_3x_1 + x_3^2).$$

Wird die Differenz $x_3 - x_1$ mit $2d$ bezeichnet, so erhält man

$$F = \frac{d}{3p}[x_1^2 + x_1(x_1 + 2d) + (x_1 + 2d)^2],$$

$$= \frac{d}{6p}(6x_1^2 + 12dx_1 + 8d^2),$$

$$= \frac{d}{6p}[x_1^2 + 4(x_1 + d)^2 + (x_1 + 2d)^2].$$

Bezeichnet man die zu den Abscissen x_1, $x_1 + d$, $x_1 + 2d$ gehörenden Ordinaten der Reihe nach durch η_1, η_2, η_3, so hat man

$$F = \frac{d}{3}(\eta_1 + 4\eta_2 + \eta_3).$$

Verschiebt man das Coordinatensystem, und hat O im neuen Systeme $X'O'Y'$ die Ordinate a, so ist

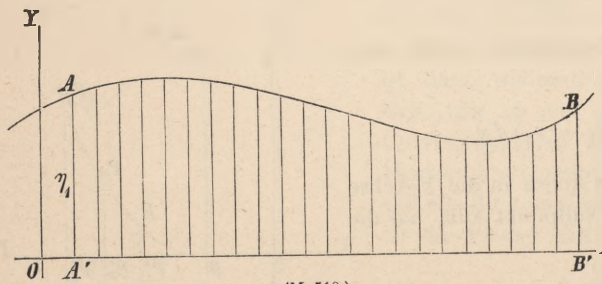
$$F' = P_1Q_1Q_3P_3 = F + 2ad = \frac{d}{3}[(\eta_1 + a) + 4(\eta_2 + a) + (\eta_3 + a)].$$

Werden die Ordinaten im neuen Systeme mit $\eta_1', \eta_2', \eta_3'$ bezeichnet, so hat man daher

$$F = \frac{d}{3}(\eta_1' + 4\eta_2' + \eta_3').$$

Durch drei Punkte und die Bedingung, dass die Hauptachse der Ordinatenachse parallel geht, ist eine Parabel eindeutig bestimmt. Hat man daher drei Punkte, P_1, P_2, P_3, und ist die Ordinate η_2 des mittleren Punktes P_2 gleich weit (um d) von den Ordinaten η_1, η_3 der andern entfernt, so schliessen die Abscissenachse, die Ordinaten η_1, η_3 und der Parabelbogen, der durch P_1, P_2, P_3 geht und dessen Hauptachse der Y-Achse parallel ist, die Fläche ein

$$F = \frac{d}{3}(\eta_1 + 4\eta_2 + \eta_3).$$



(M. 510.)

Es ist bemerkenswerth, dass dieser Ausdruck den Parameter und die Ordinaten des Scheitels nicht explicite enthält.

Man hat diese Formel dazu benutzt, den Inhalt einer Fläche angenähert zu bestimmen. Um die Fläche $AA'B'B$ angenähert zu erhalten, theile man $A'B'$ in $2n$ gleiche

Theile, und ziehe in allen Theilpunkten die Ordinaten, von $A'A$ aus begonnen seien dieselben $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots \eta_{2n+1}$.

Ersetzt man nun die Curve durch n Parabelbogen, die der Reihe nach von η_1 bis η_3, η_3 bis η_5, ... η_{2n-1} bis η_{2n+1} reichen und deren Achsen normal zur X-Achse sind, so ist die Summe der von diesen Bogen begrenzten Flächen, wenn $AB : 2n = d$ gesetzt wird,

$$F = \frac{d}{3}[(\eta_1 + 4\eta_2 + \eta_3) + (\eta_3 + 4\eta_4 + \eta_5) + \ldots]$$

$$= \frac{d}{3}[\eta_1 + 4(\eta_2 + \eta_4 + \eta_6 + \eta_{2n}) + 2(\eta_3 + \eta_5 + \eta_7 + \ldots + \eta_{2n-1}) + \eta_{2n+1}],$$

und dies kann als angenäherter Werth der gesuchten Fläche benutzt werden. Diese Formel ist unter dem Namen der SIMPSON'schen Regel bekannt*).

3. Für den zwischen zwei parallelen Sehnen AA_1 und BB_1 gelegenen Theil einer Kreisfläche ist

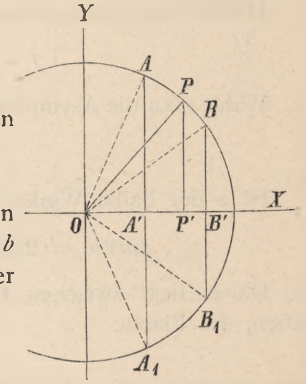
$$f = 2\int_a^b y\,dx.$$

Bezeichnet φ den Polarwinkel von P, und r den Radius des Kreises, so ist

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad dx = -r\sin\varphi\,d\varphi.$$

Sind ferner α und β die Centriwinkel der Sehnen AA_1 und BB_1, so entsprechen den Abscissen a und b die Werthe $\varphi_1 = \frac{1}{2}\alpha$, $\varphi_2 = \frac{1}{2}\beta$, und man hat daher

$$f = -2r^2\int_{\frac{1}{2}\alpha}^{\frac{1}{2}\beta} \sin^2\varphi\,d\varphi.$$



(M. 511.)

Da nun

$$\int \sin^2\varphi\,d\varphi = \int \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} + C,$$

so folgt

$$f = \frac{r^2}{2}(\alpha - \beta - \sin\alpha + \sin\beta).$$

Hieraus ergiebt sich die ganze Kreisfläche, wenn man $\beta = 0$ und $\alpha = 2\pi$ setzt.

4. Für den Theil einer Ellipsenfläche, der zwischen zwei zu einer Hauptachse normalen Sehnen liegt, ist

$$f = 2\int_a^b y\,dx,$$

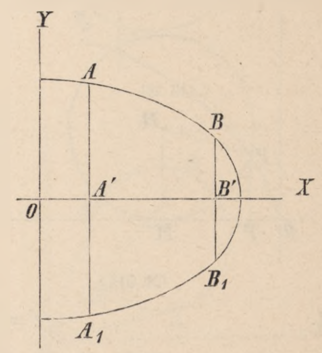
sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Halbachsen, so kann man $x = \mathfrak{a}\cos\varphi$, $y = \mathfrak{b}\sin\varphi$ setzen, mithin ist $dx = -\mathfrak{a}\sin\varphi\,d\varphi$.

Gehören zu den Punkten A und B die Werthe $\varphi = \frac{1}{2}\alpha$ und $\varphi = \frac{1}{2}\beta$, so erhält man

$$f = -2\mathfrak{a}\mathfrak{b}\int_{\frac{1}{2}\alpha}^{\frac{1}{2}\beta} \sin^2\varphi\,d\varphi,$$

daher folgt schliesslich

$$f = \frac{1}{2}\mathfrak{a}\mathfrak{b}(\alpha - \beta - \sin\alpha + \sin\beta).$$



(M. 512.)

*) Ueber den Genauigkeitsgrad der SIMPSON'schen Regel vergleiche man SCHLOEMILCH, Compendium d. höh. Analysis, 4. Aufl., Bd. I., § 82.

Die ganze Ellipsenfläche F folgt hieraus, wenn man $\beta = 0$, $\alpha = 2\pi$ setzt, zu

$$F = \pi \cdot ab\,.$$

5. Die Hyperbelfläche, die von der Hyperbel und einer zur Hauptachse normalen Sehne begrenzt wird, beträgt, wenn x die Abscisse der begrenzenden Sehne ist, und a und b die Halbachsen der Hyperbel sind,

$$f = \frac{b}{a}\int_a^x \sqrt{x^2 - a^2}\, dx\,.$$

Nun ist, wie sich nach § 4, No. 4 leicht ergiebt,

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 l(x + \sqrt{x^2 - a^2})\right] + C.$$

Daher hat man

$$f = \frac{b}{2a}\left(x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 l \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right).$$

Hierfür kann man setzen

$$f = \frac{1}{2}\left[xy - \frac{b}{a}\, l\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\right].$$

Wählt man die Asymptoten zu Coordinatenachsen, so ist die Hyperbelgleichung

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4}\,.$$

Ist α der halbe Winkel der Asymptoten, so ist

$$sin 2\alpha = 2 sin\alpha\, cos\alpha = \frac{2 tang\, \alpha}{1 + tang^2 \alpha} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}\,.$$

Daher liegt zwischen zwei Ordinaten η_1 und η_2, die dasselbe Vorzeichen haben, die Fläche

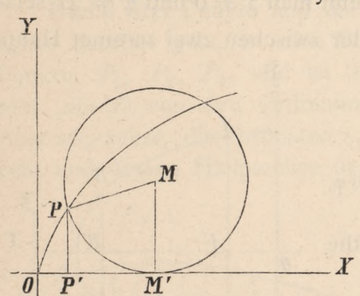
$$f = sin\, 2\alpha \cdot \frac{a^2 + b^2}{4}\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dx}{x} = \frac{ab}{2}\, l\frac{\xi_2}{\xi_1}\,.$$

6. Die Gleichungen einer Cycloide seien

$$x = a(\varphi - sin\varphi), \quad y = a(1 - cos\varphi).$$

Alsdann ist $\quad dx = a(1 - cos\varphi)\, d\varphi,$

und für die Fläche, die von dem im Nullpunkte beginnenden Cycloidenbogen und den Coordinaten des Cycloidenpunktes P eingeschlossen wird, ergiebt sich



(M. 513.)

$$f = \int_0^x y\, dx = a^2\int_0^\varphi (1 - cos\varphi)^2\, d\varphi\,.$$

Da nun

$$(1 - cos\varphi)^2 = 1 - 2cos\varphi + \tfrac{1}{2}(1 + cos 2\varphi)$$
$$= \tfrac{3}{2} - 2cos\varphi + \tfrac{1}{2}cos 2\varphi,$$

so ist

$$\int_0^\varphi (1 - cos\varphi)^2\, d\varphi = \frac{3\varphi}{2} - 2 sin\varphi + \frac{sin\, 2\varphi}{4}\,.$$

Folglich hat man

1. $$f = \frac{a^2}{4}(6\varphi - 8\, sin\varphi + sin 2\varphi).$$

Die von PP', $P'M'$ und dem Bogen PM' des erzeugenden Kreises eingeschlossene Fläche ist

$$f_1 = \frac{PP' + MM'}{2} \cdot P'M' - \frac{a^2\varphi}{2} = \frac{a^2}{2}(2 sin\varphi - cos\varphi\, sin\varphi - \varphi).$$

Daher hat man für die von der Abscissenachse, dem Cycloidenbogen OP und dem Kreisbogen PM' eingeschlossene Fläche

2. $$OPM' = f + f_1 = a^2(\varphi - sin\varphi) = a \cdot OP'.$$

Also ist diese Fläche gleich dem Rechtecke aus dem Halbmesser des erzeugenden Kreises und der Abscisse des Punktes P.

Aus 1. erhält man für $\varphi = 2\pi$ die Fläche, die von dem zu einer vollen Umdrehung gehörigen Cycloidenbogen und der Abscissenachse eingeschlossen wird

3. $$f = 3\pi a^2\,.$$

7. Ist die Gleichung einer Curve in Polarcoordinaten

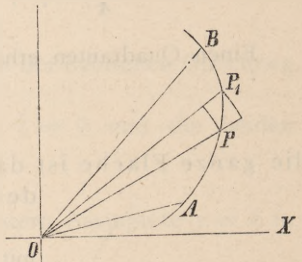
$$r = f(\varphi),$$

so lässt sich leicht der Sector angeben, der von den Radien zweier zu den Polarwinkeln α und β gehöriger Curvenpunkte A und B und dem Curvenbogen AB begrenzt wird.

Haben P und P_1 die Coordinaten φ, r und $\varphi + \Delta\varphi$, $r + \Delta r$, so kann $\Delta\varphi$ immer so klein genommen werden, dass der Curvensector $OPP_1 = \Delta\varphi$ zwischen den Kreissectoren enthalten ist, die den Centriwinkel $\Delta\varphi$ und die Radien r und $r + \Delta r$ haben; alsdann ist

wenn $\Delta r > 0$: $\quad \tfrac{1}{2}r^2\Delta\varphi < \Delta S < \tfrac{1}{2}(r + \Delta r)^2\Delta\varphi,$

„ $\quad \Delta r < 0$: $\quad \tfrac{1}{2}r^2\Delta\varphi > \Delta S > \tfrac{1}{2}(r + \Delta r)^2\Delta\varphi.$



(M. 514.)

Dividirt man Glied für Glied durch $\Delta\varphi$ und geht zur Grenze $\Delta\varphi = 0$ über, so convergiren beide Begrenzungen des Quotienten $\Delta S : \Delta\varphi$ gegen den Grenzwerth $\tfrac{1}{2}r^2$; daher hat man

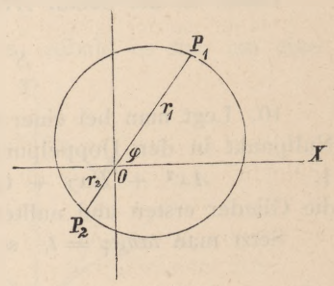
$$\frac{dS}{d\varphi} = lim\frac{\Delta S}{\Delta\varphi} = \tfrac{1}{2}r^2\,.$$

Hieraus folgt unter der Voraussetzung, dass der Curvenbogen AB continuirlich ist und ganz im Endlichen liegt, und dass φ nur wächst, wenn ein Punkt ohne umzukehren den Bogen von A bis B durchläuft

$$S = \tfrac{1}{2}\int_\beta^\alpha r^2\, d\varphi\,.$$

Für den Inhalt einer geschlossenen Curve, welche von den Radien in zwei realen Punkten geschnitten wird, hat man, wenn der Nullpunkt im Innern der Fläche liegt,

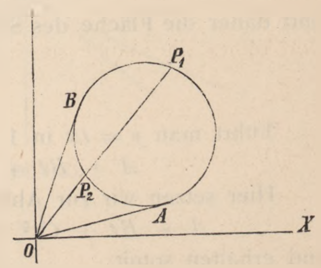
$$S = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\, d\varphi\,.$$



(M. 515.)

Sind r_1 und r_2 die beiden Radien, welche zum Polarwinkel φ gehören, und ist r_1 positiv, so ist r_2 negativ; für die Fläche F hat man alsdann auch

$$S = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi r_1^2\, d\varphi + \tfrac{1}{2}\int_0^\pi r_2^2\, d\varphi,$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_0^\pi (r_1^2 + r_2^2)\, d\varphi\,.$$



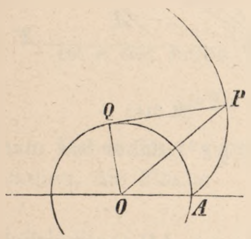
(M. 516.)

Liegt der Nullpunkt ausserhalb der gesuchten Fläche, so bestimme man die Winkel α und β, deren Radien die Curve berühren, zwischen denen also die Fläche gelegen ist; gehören nun zu φ die Radien r_1 und r_2, und ist $r_1 > r_2$, so ist die gesuchte Fläche

$$S = \tfrac12\int_\alpha^\beta r_1^2\, d\varphi - \tfrac12\int_\alpha^\beta r_2^2\, d\varphi\,,$$

also
$$S = \tfrac12\int_\alpha^\beta (r_1^2 - r_2^2)\, d\varphi\,.$$

8. Die Gleichung der Fusspunktcurve der Ellipse ist
$$r^2 = a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi\,.$$
Daher hat man für einen an der X-Achse beginnenden Sector dieser Curve
$$S = \tfrac12\int_0^\varphi (a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)\, d\varphi = \tfrac12\int_0^\varphi [a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2\varphi]\, d\varphi$$
$$= \frac{a^2+b^2}{4}\varphi + \frac{c^2}{8}\sin 2\varphi\,.$$
Einen Quadranten erhält man für $\varphi = \frac{\pi}{2}$
$$S = \frac{a^2+b^2}{8}\pi\,,$$
die ganze Fläche ist daher das arithmetische Mittel der beiden über den Hauptachsen construirten Kreise.



(M. 517.)

9. Für die Kreisevolvente hat man, wenn AOQ mit ω und der Halbmesser des Kreises mit a bezeichnet werden
$$r^2 = a^2(1+\omega^2)\,, \quad tang(\omega - \varphi) = \omega\,.$$
Aus der letzteren Gleichung folgt
$$d\omega - d\varphi = \cos^2(\omega - \varphi)\, d\omega\,,$$
mithin
$$d\varphi = \frac{\omega^2}{1+\omega^2}\, d\omega\,.$$
Daher ist der Sector AOP
$$S = \tfrac12 a^2 \int_0^\omega \omega^2\, d\omega = \tfrac16 a^2\omega^3\,.$$

10. Legt man bei einer Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt den Nullpunkt in den Doppelpunkt, so ist die Gleichung der Curve von der Form

1. $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = Dx^3 + Ex^2y + Fxy^2 + Gy^3\,,$$

die Glieder ersten und nullten Grades fehlen.

Setzt man $tang\,\varphi = t$, so ist $y = xt$, $r^2 = x^2(1+t^2)$,
$$d\varphi = \frac{dt}{1+t^2}\,,$$
und daher die Fläche des Sectors, für dessen Endpunkte t die Werthe a und b hat
$$S = \tfrac12\int_a^b x^2\, dt\,.$$
Führt man $y = tx$ in 1. ein, so entsteht für x die lineare Gleichung
$$A + Bt + Ct^2 = (D + Et + Ft^2 + Gt^3)\cdot x\,.$$
Hier setzen wir zur Abkürzung
$$A + Bt + Ct^2 = T\,, \quad D + Et + Ft^2 + Gt^3 = \Tau\,,$$
und erhalten somit
$$x = \frac{T}{\Tau}\,;$$
daher ergiebt sich für den Curvensector

$$S = \tfrac12\int_a^b \frac{T^2}{\Tau^2}\, dt\,.$$

Dieses Integral kann in jedem Falle nach den Regeln über die Integration echt gebrochener rationaler Functionen ausgeführt werden. Es ist bemerkenswerth, dass diese Sectoren mithin durch algebraische Functionen, Logarithmen und Arcustangens ausgedrückt werden können.

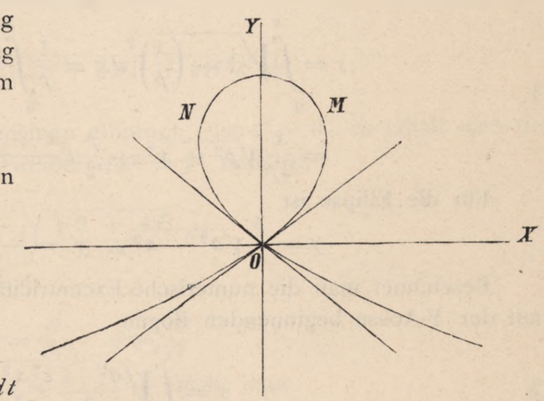
Wählt man bei einer symmetrischen Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt die Symmetrieachse zur Y-Achse, so ist die Gleichung für x geraden Grades, mithin
$$B = D = F = 0\,,$$
und die Gleichung 1. reducirt sich auf

2. $$Ax^2 + Cy^2 = Ex^2y + Gy^3\,.$$

Die Richtungen der Asymptoten bestimmen sich aus der cubischen Gleichung
$$Et + Gt^3 = 0\,;$$
diese ergiebt eine der X-Achse parallele Asymptote $t = 0$ und die beiden Asymptotenrichtungen
$$t = \sqrt{-E : G}\,.$$
Setzt man zur Bestimmung der Ordinate k der erstern Asymptote $y = k$ in 2., so folgt
$$(A - Ek)\,x^2 = Gk^3 - Ck^2\,.$$
Hieraus folgen für x zwei unendlich grosse Wurzeln, wenn
$$k = A : E\,.$$
Die in diesem Abstande der X-Achse parallele Gerade hat also mit der Curve drei unendlich ferne Punkte gemein, ist somit Wendetangente mit unendlich fernem Wendepunkte.

Diese Wendetangente wird selbst unendlich fern, und gleichzeitig auch die anderen beiden Asymptoten, wenn $E = 0$.

Da G alsdann von Null verschieden sein muss, sobald es sich um eine eigentliche Curve dritter Ordnung handelt, so kann man die Gleichung durch G dividiren und in der Form angeben
$$Ax^2 + Cy^2 = y^3\,.$$
Für diese Curve hat man nun
$$T = A + Ct^2\,, \quad \Tau = t^3\,,$$
$$S = \tfrac12\int_a^t \frac{(A + Ct^2)^2}{t^6}\, dt$$
$$= \tfrac12\int_a^t \left(\frac{A^2}{t^6} + \frac{2AC}{t^4} + \frac{C^2}{t^2}\right) dt$$



(M. 518.)

$$= \frac{A^2}{10}\left(\frac{1}{a^5} - \frac{1}{t^5}\right) + \frac{AC}{3}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{t^3}\right) + \frac{C^2}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{t}\right).$$
Für die Doppelpunktstangenten hat man die Gleichung
$$A + Ct^2 = 0\,.$$
Haben A und C verschiedene Vorzeichen, so sind die Tangenten real und man hat für den zwischen ihnen liegenden Curvensector, für die Schleife OMN,

$$S = 2\sqrt{-\frac{C}{A}}\left[\frac{A^2}{10}\cdot\left(-\frac{C}{A}\right)^2 + \frac{AC}{3}\cdot\left(-\frac{C}{A}\right) + \frac{C^2}{2}\right],$$
$$= \frac{8}{15}C^2\sqrt{-\frac{C}{A}}.$$

Es ist hervorzuheben, dass die Sectoren dieser Curven rationale algebraische Functionen des Parameters t sind.

---

11. Das Differential ds eines Bogens der Curve $y = f(x)$ ist bekanntlich

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\cdot dx.$$

Daher ist der Bogen zwischen den Punkten A und B, deren Abscissen a und b sind

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Hierbei wird ein rechtwinkeliges Coordinatensystem vorausgesetzt. In einem schiefwinkeligen Parallel-Coordinatensysteme mit dem Achsenwinkel erscheint ds als der Grenzwerth der Seite eines Dreiecks, das die Seiten Δx und Δy und den von ihnen eingeschlossenen Winkel $\pi - \alpha$ hat; daher ist

$$\frac{ds}{dx} = \lim\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + 2\Delta x\Delta y\cos\alpha}{\Delta x^2}$$
$$= 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\cos\alpha,$$

und man hat somit

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + 2y'\cos\alpha + y'^2}\,dx.$$

12. Für einen im Scheitel anfangenden Bogen der Parabel

$$y = \frac{x^2}{2p}$$

ist

$$y' = \frac{x}{p}, \quad \text{und daher}$$

1. $$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{x}{p}\right)^2}\,dx = \frac{1}{p}\int_0^x \sqrt{p^2 + x^2}\,dx$$
$$= \frac{x}{2p}\sqrt{p^2 + x^2} + \frac{p}{2}\,l\,\frac{x + \sqrt{p^2 + x^2}}{p}.$$

Für die Ellipse ist

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Bezeichnet man die numerische Excentricität mit ε, so erhält man für einen auf der Y-Achse beginnenden Bogen

2. $$s = \int_0^x \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}}\,dx.$$

Dieses Integral ist irreductibel.

Für die Hyperbel ist

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad y' = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Bezeichnet man auch hier die numerische Excentricität durch ε, so ergiebt sich für einen im Scheitel beginnenden Bogen

3. $$s = \int_0^x \sqrt{\frac{\varepsilon^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}\cdot dx.$$

Auch dieses Integral ist irreductibel; beide Integrale gehören zur Klasse der elliptischen Integrale, auf die wir im II. Theile der Integralrechnung eingehen werden.

13. Für die Cycloide ist

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Nimmt man t zur unabhängigen Variabeln, so ist

$$dx = a(1 - \cos t)\,dt, \quad dy = a\sin t\,dt$$

und daher ein im Nullpunkte beginnender Bogen

$$s = \int_0^x \sqrt{dx^2 + dy^2}$$
$$= a\int_0^t \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\,dt = 2a\int_0^t \sin\frac{t}{2}\,dt.$$

Dies ergiebt

$$s = 4a\left(1 - \cos\frac{t}{2}\right).$$

Die Länge der ganzen Cycloide erhält man hieraus für $t = 2\pi$; sie ergiebt sich zu

$$s = 8a.$$

14. Für die Curve dritter Ordnung

$$Ax^2 + Cy^2 = y^3$$

ist, wenn man wieder $y = tx$ setzt,

$$x = \frac{A + Ct^2}{t^3}, \quad dx = -\frac{3A + Ct^2}{t^4}\,dt, \quad dy = t\,dx + x\,dt = -\frac{2A}{t^3}.$$

Folglich ist für einen zwischen den Richtungen $t = a$ und $t = b$ liegenden Curvenbogen

$$s = \int_a^b \frac{1}{t^4}\sqrt{(Ct^2 + 3A)^2 + 4A^2t^2}\,dt.$$

Dieses Integral ist im Allgemeinen elliptisch. Ist $C = 0$, so erhält man die NEIL'sche oder semicubische Parabel $Ax^2 = y^3$ und hat

$$s = A\int_a^b \frac{\sqrt{9 + 4t^2}}{t^4}\,dt.$$

Hierbei ist $y = tx$, mithin

$$x = \frac{A}{t^3}, \quad y = \frac{A}{t^2}.$$

Setzt man in dem Integrale $t = 1 : z$, so erhält man

1. $$s = A\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} \sqrt{9z^2 + 4}\cdot z\,dz.$$

Nun ist bekanntlich

$$\int \sqrt{9z^2 + 4}\cdot z\,dz = \frac{1}{27}(9z^2 + 4)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Ersetzt man hier

$$z^2 = \frac{1}{t^2} = \frac{y}{A},$$

und führt die Grenzen 0 und y ein, so erhält man schliesslich

$$s = \frac{1}{27\sqrt{A}}\left[\sqrt{(9y+4A)^3} - 8\sqrt{A^3}\right].$$

15. Will man Polarcoordinaten verwenden, so macht man die Substitutionen

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

$$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi, \quad dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi.$$

Daher ist $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$, und man hat

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi.$$

16. Die Spirale des Archimedes hat die Gleichung

$$r = a\varphi;$$

hier ist $r' = a$, und man erhält den vom Nullpunkt an gerechneten Bogen

$$s = a\int_0^{\varphi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi$$

$$= \frac{a}{2}\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + l(\varphi + \sqrt{\varphi^2+1})\right].$$

Für die hyperbolische Spirale ist

$$r = \frac{a}{\varphi}, \quad r' = -\frac{a}{\varphi^2}, \quad s = a\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sqrt{\varphi^2+1}}{\varphi^2}\, d\varphi.$$

Daher ist nach § 4, No. 4,

$$s = a\left[{}_{\varphi_1}^{\varphi_2}\; l(\varphi + \sqrt{\varphi^2+1}) - \frac{1}{\varphi}\sqrt{\varphi^2+1}\right],$$

wobei durch das Zeichen

$$\left[{}_{\varphi_1}^{\varphi_2}\; f(\varphi)\right]$$

die Differenz $f(\varphi_2) - f(\varphi_1)$ angedeutet werden soll.

17. Aus den Gleichungen der Kreisevolvente (No. 9) ergiebt sich

$$r\,d\varphi = \frac{a^2\omega^2}{r}\, d\omega, \quad dr = \frac{a^2\omega}{r}\, d\omega, \quad ds = a\omega\, d\omega$$

und man erhält daher für den Bogen, dessen Endpunkte den Wälzungswinkeln 0 und ω zugehören

$$s = \tfrac{1}{2}a\omega^2.$$

---

18. Das Bogendifferential einer Raumcurve ist (Differentialrechn. § 6, No. 8)

1. $$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Sind die Gleichungen der Horizontal- und der Verticalprojection gegeben

$$y = f_1(x), \quad z = f_2(x),$$

so hat man

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\cdot dx;$$

daher ist der zwischen den Abscissen x_1 und x_2 enthaltene Bogen

2. $$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\cdot dx.$$

Sind die Coordinaten eines Curvenpunktes als Functionen eines Parameters t gegeben, so ist

3. $$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\cdot dt.$$

19. Sind die Curvengleichungen

$$y^2 = 2ax, \quad z^2 = 2bx,$$

so ist die Curve der Durchschnitt zweier parabolischen Cylinder, und es ergiebt sich

$$y' = \sqrt{\frac{a}{x}}, \quad z' = \sqrt{\frac{b}{x}};$$

Rechnet man den Bogen vom gemeinsamen Scheitel der beiden Cylinder aus, so hat man

$$s = \int_0^x \sqrt{\frac{x+a+b}{x}}\, dx.$$

Setzt man $x = u^2$, so folgt

$$s = 2\int_0^u \sqrt{u^2+a+b}\, du.$$

Daher erhält man schliesslich

$$s = \sqrt{x(x+a+b)} + \sqrt{a+b}\; l\, \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+a+b}}{\sqrt{a+b}}.$$

20. Die Raumcurve dritter Ordnung

$$x = at, \quad y = bt^2, \quad z = ct^3$$

ist der gemeinsame Durchschnitt der Flächen zweiter Ordnung, deren Gleichungen durch Elimination von t aus den drei Gleichungen erhalten werden:

$$bx^2 - a^2y = 0, \quad b^2xz - acy^2 = 0, \quad cxy - abz = 0;$$

dieselben stellen einen parabolischen Cylinder, einen Kegel und ein hyperbolisches Paraboloid dar.

Aus den Curvengleichungen erhält man

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = 2bt, \quad \frac{dz}{dt} = 3ct^2,$$

daher ist die Länge eines im Nullpunkte beginnenden Bogens

1. $$s = \int_0^t \sqrt{a^2 + 4b^2t^2 + 9c^2t^4}\, dt.$$

Dieses Integral ist im Allgemeinen elliptisch; es wird algebraisch, wenn

$$4b^4 - 9a^2c^2 = 0.$$

Setzt man $2b^2 = 3ac$ voraus, so nimmt der Kegel die besondere Gleichung an

$$3xz - 2y = 0,$$

während die beiden anderen Flächen keine Besonderheiten erhalten.

Das Integral 1. wird jetzt

$$s = \int_0^t (a + 3ct^2)dt = at + ct^3 = x + z.$$

---

21. Schneidet man aus einem begrenzten Volumen durch zwei zu derselben Geraden G normale Ebenen Q und Q_1 eine Schicht ΔV, und ist die Schnitt-

ebene Q von einem gewissen Nullpunkte auf der Geraden um p, die andere Q_1 um $p + \Delta p$ entfernt, hat ferner die Schnittfläche auf Q den Inhalt q, so ist das Volumen der Schicht ΔV von dem Cylinder $q \cdot \Delta p$ um so weniger verschieden, je kleiner Δp ist, und stimmt mit dem Cylinder bis zu jedem Genauigkeitsgrade überein, wofern nur Δp hinlänglich klein ist; daher ist

$$\lim \frac{\Delta V}{\Delta p} = \frac{dV}{dp} = q.$$

Hieraus folgt durch Integration für das Volumen, das zwischen den Querschnitten liegt, die die Abstände $p = a$ und $p = b$ vom Nullpunkte haben

$$V = \int_a^b q\,dp.$$

Sind insbesondere die Querschnitte normal zur X-Achse und bezeichnet man den Querschnitt in diesem Falle mit q_x, so hat man

$$V = \int_{x_1}^{x_2} q_x\,dx.$$

Um die zwischen zwei Parallelkreisen enthaltene Schicht eines Rotationskörpers zu erhalten, lässt man G mit der Rotationsachse zusammenfallen; ist nun die Gleichung eines Meridians, in einem orthogonalen Systeme, dessen Achsen G und normal zu G sind, und in welchem die zu G normale Coordinate mit r bezeichnet wird,

$$r = f(p),$$

so ist das Volumen der Schicht

$$V = \pi \int_a^b r^2\,dp.$$

22. Ein zur X-Achse normaler Querschnitt q_x des dreiachsigen Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

ist eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Daher ist die Fläche desselben

$$q_x = \pi \frac{bc}{a^2}(a^2 - x^2);$$

mithin hat man für das Volumen einer Schicht, die von der YZ-Ebene und einer dazu parallelen begrenzt wird

$$V = \pi \frac{bc}{a^2}\int_0^x (a^2 - x^2)\,dx$$

$$= \pi \frac{bc}{a^2}(a^2 x - \tfrac{1}{3}x^3).$$

Das Volumen des ganzen Ellipsoids ist

$$V = \pi \frac{bc}{a^2}\int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\,dx = 2\pi \frac{bc}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)\,dx$$

$$= \frac{4\pi}{3} \cdot abc.$$

Schneidet man das einschalige Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

normal zur Z-Achse, so ist der Querschnitt eine Ellipse mit den Halbachsen $a\sqrt{z^2 + c^2} : c$ und $b\sqrt{z^2 + c^2} : c$. Das Volumen einer Schicht zwischen der XY-Ebene und einer parallelen Ebene ist daher

$$V = \pi \frac{ab}{c^2}\int_0^z (z^2 + c^2)\,dz,$$

$$= \pi \frac{ab}{c^2}(\tfrac{1}{3}z^3 + c^2 z).$$

Die Schicht zwischen den Ebenen $z = -c$ und $z = c$ beträgt

$$\frac{8\pi}{3}abc,$$

und ist daher doppelt so gross, wie ein Ellipsoid mit den Halbachsen a, b, c.

Im zweischaligen Hyperboloide

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

legen wir einen Querschnitt normal zur X-Achse; derselbe ist eine Ellipse mit den Halbachsen $b\sqrt{x^2 - a^2} : a$ und $c\sqrt{x^2 - a^2} : a$. Das vom Scheitel bis zu einem Querschnitte reichende Volumen ist daher

$$V = \pi \frac{bc}{a^2}\int_a^x (x^2 - a^2)\,dx,$$

$$= \pi \cdot \frac{bc}{a^2}(\tfrac{1}{3}x^3 - a^2 x + \tfrac{2}{3}a^3).$$

23. Das elliptische Paraboloid

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0$$

hat normal zur Z-Achse einen elliptischen Querschnitt mit den Halbachsen $\sqrt{2az}$ und $\sqrt{2bz}$. Daher ist das normal zur Achse abgeschnittene Segment

$$V = 2\pi\sqrt{ab}\int_0^z z\,dz,$$

$$= \pi\sqrt{ab} \cdot z^2.$$

Ist F die Fläche der das Segment begrenzenden Ellipse, so ist

$$F = 2\pi\sqrt{ab} \cdot z,$$

und man hat daher

$$V = \tfrac{1}{2}Fz,$$

also die Hälfte des Cylinders von der Basis F und der Höhe z.

Vom hyperbolischen Paraboloide

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - 2z = 0$$

berechnen wir das oberhalb der XY-Ebene entlang der positiven X-Achse sich erstreckende und von einem Querschnitte normal zur X-Achse begrenzte Volumen.

Eine Normalebene zur X-Achse schneidet die Fläche in einer Parabel, deren Scheitel in der Höhe $x^2 : 2a$ über der XY-Ebene liegt, und die von der XY-Ebene in einer Sehne von der Länge $2\sqrt{b : a} \cdot x$ geschnitten wird. Der Inhalt dieses parabolischen Querschnitts ist daher

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x^3\,;$$

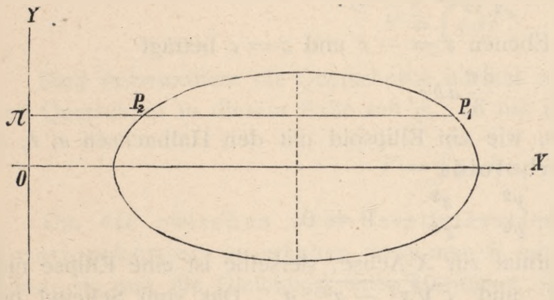
mithin ist die gesuchte Schicht

$$V = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\int_0^x x^3\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\frac{x^4}{4},$$

oder, wenn mit F der das Volumen begrenzende Querschnitt bezeichnet wird

$$V = \tfrac{1}{4}F\cdot x\,,$$

also ein Viertel des Cylinders von der Basis F und der Höhe x.



(M. 519.)

24. Rotirt eine Ellipse um eine Achse OY, die in der Ebene der Ellipse liegt, parallel zu einer Hauptachse der Ellipse ist, und die Ellipse nicht schneidet, so entsteht ein doppelsymmetrischer Ring. Ein Querschnitt q dieses Ringes, der durch Π normal zur Drehungsachse gelegt wird, ist die Differenz der beiden Kreise, deren Halbmesser ΠP_1 und ΠP_2 sind; daher ist, wenn e den Abstand des Ellipsenmittelpunktes von der Rotationsachse bezeichnet

$$q = \pi\cdot(\Pi P_1 + \Pi P_2)(\Pi P_1 - \Pi P_2)\,,$$
$$= \frac{4\pi a e}{b}\sqrt{b^2 - y^2}\,.$$

Folglich ist das Ringvolumen

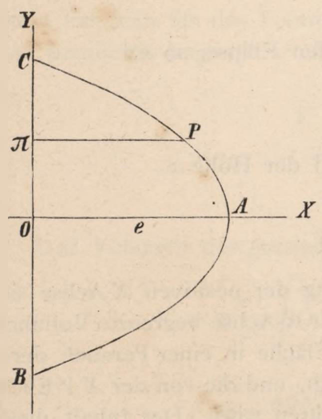
$$V = \frac{4\pi a e}{b}\int_{-b}^{b}\sqrt{b^2 - y^2}\,dy = \frac{8\pi a e}{b}\int_0^b\sqrt{b^2 - y^2}\,dy\,.$$

Setzt man $y = b\cos\varphi$, so erhält man

$$\int_0^b\sqrt{b^2 - y^2}\,dy = b^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{4}b^2 \qquad (\S\ 7,\ \text{No. } 9,\ 1)\,.$$

Hieraus folgt

$$V = 2\pi^2\cdot abe\,.$$



(M. 520.)

Bezeichnet E die Fläche der rotirenden Ellipse und w den Perimeter des von ihrem Mittelpunkte beschriebenen Kreises, so ist

$$V = E\cdot w\,.$$

Dieselbe Formel gilt auch, wie man sofort sieht, für jeden zwischen zwei Meridianen gelegenen Sector dieses Ringes, sobald w den innerhalb des Sectors gelegenen Theil des vom Mittelpunkte beschriebenen Weges bezeichnet.

Rotirt ein Parabelsegment ABC um die zur Parabelachse normale Ordinate BC, und ist die Parabelgleichung $y^2 = 2a(e - x)$, so ist die Fläche des zur Ordinate $O\Pi = y$ gehörigen Parallelkreises

$$q = \pi x^2 = \frac{\pi}{4a^2}(2ae - y^2)^2\,.$$

Daher ist das Ringvolumen

$$V = \frac{\pi}{4a^2}\int_{-\sqrt{2ae}}^{\sqrt{2ae}}(2ae - y^2)^2\,dy = \frac{\pi}{2a^2}\int_0^{\sqrt{2ae}}(2ae - y^2)^2\,dy\,,$$
$$= \frac{16\pi}{15}e^2\sqrt{2ae}\,.$$

Bezeichnet F die rotirende Fläche, so ist

$$F = \frac{4}{3}e\sqrt{2ae}\,;$$

daher hat man

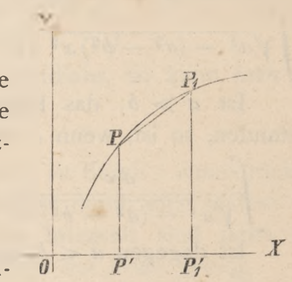
$$V = \frac{4\pi}{5}eF\,.$$

---

25. Wir beschliessen diesen Abschnitt mit Formeln und Beispielen über den Inhalt von Rotationsflächen.

Um eine zwischen zwei Parallelkreisen enthaltene Zone einer Rotationsfläche zu berechnen, die durch Umdrehung der Curve $y = f(x)$ um die X-Achse entsteht, betrachten wir zwei auf einem Meridiane gelegene Punkte P und P_1 mit den Coordinaten x, y und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$. Die Kegelzone, welche die Sehne PP_1 beschreibt, hat den Inhalt

$$\Delta S = 2\pi\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\,(y + \tfrac{1}{2}\Delta y)\,.$$



(M. 521.)

Die zwischen denselben Parallelkreisen enthaltene Flächenzone sei ΔF. Nähert sich Δx dem Grenzwerthe Null, so nähert sich der Quotient $\Delta F : \Delta x$ dem Grenzwerthe von $\Delta S : \Delta x$; daher hat man

$$\frac{dF}{dx} = \lim\frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim\frac{\Delta S}{\Delta x} = 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,.$$

Hiernach ergiebt sich für die Zone, deren Parallelkreise die Abscissen a und b haben,

$$F = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx\,.$$

26. Rotirt die Parabel $y^2 = 2px$ um die X-Achse, so ist der vom Scheitel bis zu einem Parallelkreise sich erstreckende Theil des Rotationsparaboloids

$$F = 2\pi\int_0^x\sqrt{2px}\sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\,dx\,,$$
$$= 2\pi\sqrt{p}\int_0^x\sqrt{2x + p}\,dx\,,$$
$$= \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(2x + p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}\right].$$

Rotirt diese Parabel um die Y-Achse, so entsteht eine Rotationsfläche vierten Grades, die im Nullpunkte eine Spitze hat. Für die von der Spitze bis zu einem Parallelkreise reichende Zone derselben ist

$$F = 2\pi\int_0^y x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \frac{\pi}{p^2}\int_0^y y^2\sqrt{p^2+y^2}\,dy\,.$$

Nun ist (§ 4, No. 4)

$$\int y^2\sqrt{p^2+y^2}\,dy = \frac{1}{8}(2y^3+p^2y)\sqrt{p^2+y^2} - \frac{p^4}{8}\int\frac{dy}{\sqrt{p^2+y^2}}\,.$$

Daher ist

$$F = \frac{\pi}{8p^2}(2y^3+p^2y)\sqrt{p^2+y^2} - \frac{\pi p^2}{8}\,l\,\frac{y+\sqrt{p^2+y^2}}{p}\,.$$

27. Für die Oberfläche des Ellipsoids, das durch Rotation der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

um die X-Achse entsteht, hat man

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}\,,\qquad \sqrt{1+y'^2} = \frac{b}{a^2}\,\frac{\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}}{y}\,.$$

Daher ist eine in der YZ-Ebene beginnende Zone des Rotationsellipsoids

$$F = \frac{2\pi b}{a^2}\int_0^x\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\,dx\,.$$

Nach § 4, No. 4 ist

$$\int\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2} + \frac{a^4}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}}\,.$$

Ist $a > b$, das Ellipsoid also durch Rotation um die grosse Achse entstanden, so ist, wenn c die Excentricität des Meridians bezeichnet,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{a^4-c^2x^2}} = \frac{1}{c}\,arc\sin\frac{cx}{a^2}+C;$$

Ist dagegen $a < b$, so hat man

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{a^4+c^2x^2}} = \frac{1}{c}\,l(cx+\sqrt{a^4+c^2x^2})+C\,.$$

Daher ergiebt sich schliesslich,

wenn $a > b$,

$$F = \frac{\pi b}{a^2}x\sqrt{a^4-c^2x^2} + \frac{\pi a^2 b}{c}\,arc\sin\frac{cx}{a^2}\,;$$

wenn $a < b$,

$$F = \frac{\pi b}{a^2}x\sqrt{a^4+c^2x^2} + \frac{\pi a^2 b}{c}\,l\,\frac{cx+\sqrt{a^4+c^2x^2}}{a^2}\,.$$

Die ganze Oberfläche erhält man, wenn man x durch a ersetzt und mit 2 multiplicirt

$$F = 2\pi b\left(b+\frac{a^2}{c}\,arc\sin\frac{c}{a}\right),\quad a > b;$$

$$F = 2\pi b\left(b+\frac{a^2}{c}\,l\,\frac{b+c}{a}\right),\quad a < b\,.$$

28. Rotirt die Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

um die X-Achse, so ist die von einem Scheitel bis zu einem Parallelkreise sich erstreckende Fläche des zweischaligen Rotationshyperboloids, wenn die Excentricität wieder mit c bezeichnet wird

1.
$$F = \frac{2\pi b}{a^2}\int_a^x\sqrt{c^2x^2-a^4}\,dx$$
$$= \frac{\pi b}{a^2}\left[x\sqrt{c^2x^2-a^4} - a^2b - \frac{a^4}{c}\,l\,\frac{cx+\sqrt{c^2x^2-a^4}}{a(c+b)}\right].$$

Rotirt dieselbe Hyperbel um die X-Achse, so entsteht ein einschaliges Rotationshyperboloid. Für eine von der XY-Ebene bis zu einem Parallelkreise reichende Zone desselben ist

$$F = 2\pi\int_0^y x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy\,.$$

Da nun

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2+y^2}\,,\qquad \frac{dx}{dy} = \frac{ay}{b\sqrt{b^2+y^2}}\,,\qquad \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{a\sqrt{b^4+c^2y^2}}{b^2x}\,c\,,$$

so hat man

2.
$$F = \frac{2\pi a}{b^2}\int_0^y\sqrt{b^4+b^2y^2}\,dy\,,$$
$$= \frac{\pi a}{b^2}\left(y\sqrt{b^4+c^2y^2} + \frac{b^4}{c}\,l\,\frac{cy+\sqrt{b^4+c^2y^2}}{b^2}\right).$$

29. Bezeichnet ds das Bogendifferential eines Meridians, so kann man die Zone der Rotationsfläche kürzer in der Form angeben

$$F = 2\pi\int y\,ds\,.$$

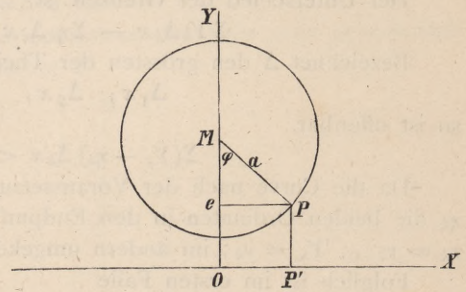
Hier erscheint s als die Integrationsvariable, und y ist durch s auszudrücken, Statt dessen kann man unter Umständen auch y und ds durch eine andere unabhängige Variable t ausdrücken; die Grenzen des Integrals sind dann die Werthe von t, welche für die Endpunkte des Meridians der Zone gelten.

Rotirt ein Kreis mit dem Halbmesser a um eine Gerade OX, die in seiner Ebene um e vom Centrum entfernt liegt, und nimmt man den Winkel φ zur unabhängigen Variabeln, so ist

$$y = e - a\cos\varphi\,,\qquad ds = a\,d\varphi\,.$$

Will man die ganze Oberfläche des Ringes berechnen, so gelten für φ die Grenzen 0 und 2π; daher ist

$$F = 2\pi a\int_0^{2\pi}(e-a\cos\varphi)\,d\varphi = 4\pi^2 ae\,.$$



(M. 522.)

§ 9. Bestimmte Doppelintegrale.

1. Das einfache bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

haben wir als den Grenzwerth definirt, dem sich die Summe

$$\sum_0^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n}$$

nähert, wenn n unendlich wächst, und haben, wenn $a < b$, diesen Grenzwerth als den Inhalt der Fläche erkannt, die von der Curve $y = f(x)$, der X-Achse und den zu den Abscissen a und b gehörigen Ordinaten $f(a)$ und $f(b)$ eingeschlossen wird. Die Abscissendifferenz $b - a$ erscheint dabei in n gleiche Theile getheilt, ein solcher Theil ist $(b - a) : n$ und der Functionswerth

$$f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

ist die Ordinate, die zum $k$ten Theilpunkte gehört.

Setzen wir

$$\frac{b-a}{n} = \Delta x, \quad f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = y,$$

so haben wir einfacher

$$\int_a^b f(x)dx = lim \, \Sigma y \Delta x.$$

Die Voraussetzungen, dass alle Δx gleich sind und dass die y die zu den Theilpunkten gehörigen Ordinaten sind, können aufgegeben werden; theilt man die Differenz $b - a$ in n Theile $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \ldots \Delta_n x$ von beliebigem Verhältniss und ist y_k eine Ordinate der Curve $y = f(x)$, die zu einem innerhalb $\Delta_k x$ gelegenen Punkte der Abscissenachse gehört, so ist

$$lim \, \Sigma y_k \Delta_k x$$

ebenfalls die obige Fläche.

Ist nämlich die Curve $y = f(x)$ zwischen A und B beständig steigend oder beständig fallend, und bezeichnet man mit η_k und Y_k die grösste und kleinste innerhalb $\Delta_k x$ fallende Ordinate, und mit F die Fläche $AA'B'B$, so gelten die Begrenzungen

$$\Sigma \eta_k \Delta_k x < F < \Sigma Y_k \Delta_k x,$$
$$\Sigma \eta_k \Delta_k x < \Sigma y_k \Delta_k x < \Sigma Y_k \Delta_k x.$$

Der Unterschied der Grenzen ist

$$\Sigma Y_k \Delta_k x - \Sigma \eta_k \Delta_k x = \Sigma (Y_k - \eta_k) \Delta_k x.$$

Bezeichnet Δ den grössten der Theile

$$\Delta_1 x, \quad \Delta_2 x, \quad \Delta_3 x, \; \ldots \; \Delta_n x,$$

so ist offenbar

$$\Sigma (Y_k - \eta_k) \Delta_k x < \Delta \cdot \Sigma (Y_k - \eta_k).$$

Da die Curve nach der Voraussetzung nur steigt oder fällt, so sind Y_k und η_k die beiden Ordinaten in den Endpunkten von $\Delta_k x$; im ersten Falle ist daher $\eta_k = y_{k-1}$, $Y_k = y_k$; im andern umgekehrt $\eta_k = y_k$, $Y_k = y_{k-1}$.

Folglich ist im ersten Falle

$$\sum_1^n (Y_k - \eta_k) = (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \ldots + y_n - y_{n-1} = y_n - y_0,$$

im letzten

$$\sum_1^n (Y_k - \eta_k) = (y_0 - y_1) + (y_1 - y_2) + (y_2 - y_3) + \ldots + (y_{n-1} - y_n) = y_0 - y_n.$$

Sind nun die Ordinaten alle endlich, so verschwindet das Produkt

$$\Delta \cdot \Sigma (Y_k - \eta_k) = \pm \Delta \cdot \Sigma (y_n - y_0)$$

mit Δ zugleich; daher hat man in der That

$$F = lim \, \Sigma y_k \Delta_k x,$$

oder kürzer mit Hinweglassung des Index k

$$\int_a^b f(x)dx = lim \, \Sigma y \Delta x,$$

wobei man zu merken hat, dass die Summe über alle innerhalb der Begrenzung liegenden x zu erstrecken ist,

$$a \overline{\underline{<}} x \leq b.$$

Wenn die Curve abwechselnd steigt und fällt, so kann man die soeben durchgeführten Betrachtungen mit den für denselben Fall in § 1, No. 5 angestellten combiniren; man kommt dadurch zu der Erkenntniss, dass auch für diesen Fall

$$\int_a^b f(x)dx = lim \, \Sigma y \Delta x,$$

wenn nur y_k für alle zwischen den Grenzen a und b enthaltene Werthe von x endlich bleibt.

Anstatt dieses Integral als das zwischen den Grenzen a und b genommene Integral von $f(x)dx$ zu bezeichnen, kann man es geometrisch anschaulicher das über die Strecke $A'B'$ ausgedehnte Integral von $f(x)dx$ nennen.

2. Ist z eine Function zweier Variabeln, $z = \varphi(x, y)$ und betrachten wir x und y als rechtwinkelige Coordinaten eines Punktes der Ebene, so gehört zu jedem Punkte der Ebene ein bestimmter Werth von z. Ist nun in der Ebene eine begrenzte Fläche f gegeben, und theilen wir dieselbe in beliebig gestaltete kleine Theile Δf, multipliciren jeden Theil $\Delta_k f$ mit einem z_k, welches zu irgend einem innerhalb Δf gelegenen Punkte gehört, so verstehen wir unter dem über die Fläche f ausgedehnten Integrale

$$\int z \, df$$

den Grenzwerth, gegen den die Summe

$$\Sigma z_k \Delta_k f$$

convergirt, wenn sämmtliche $\Delta_k f$ verschwinden; hierbei ist die Summe über alle im Innern von f liegende Flächentheile Δf zu erstrecken; man hat also

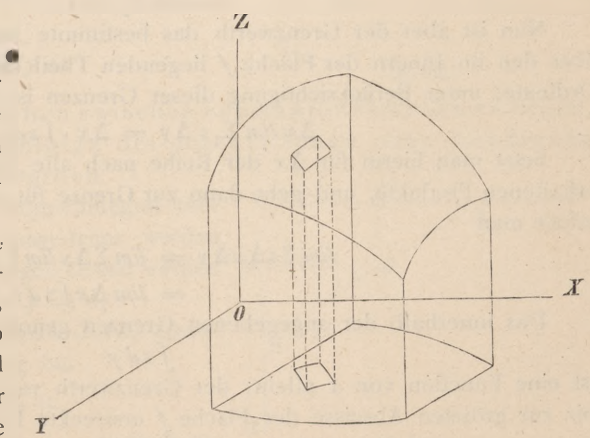
$$\int z \, df = lim \, \Sigma z_k \Delta_k f.$$

Dieser Begriff eines über eine Fläche erstreckten Integrals wird geometrisch am anschaulichsten, wenn wir die Oberfläche F

$$z = \varphi(x, y)$$

construiren, und diese Fläche mit dem verticalen Cylinder durchschneiden, auf dem die entlang des Perimeters von f errichteten z Ordinaten liegen.

Bezeichnen ζ_k und Z_k die grösste und kleinste Ordinate der Fläche $z = \varphi(x, y)$, deren Fusspunkte innerhalb $\Delta_k f$ liegen und V den Theil des Cylinders zwischen der XY-Ebene und der Fläche F, so ist



(M. 523.)

$$\Sigma \zeta_k \Delta_k f < V < \Sigma Z_k \Delta_k f$$
$$\Sigma \zeta_k \Delta_k f \leqq \Sigma z_k \Delta_k f \leqq \Sigma Z_k \Delta_k f .$$

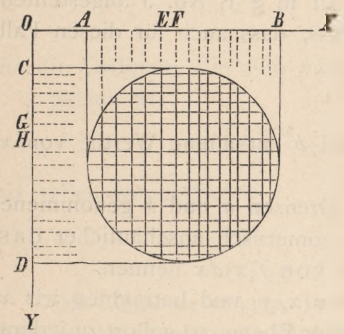
Geht man zur Grenze für verschwindend kleine Δf über, so fallen die Begrenzungen

$$\Sigma \zeta_k \Delta_k f \quad \text{und} \quad \Sigma Z_k \Delta_k f$$

zusammen; daher ist

$$\int z\,df = lim\, \Sigma z_k \Delta_k f = V.$$

3. Wenn man die Differenz AB der äussersten Abscissen der Fläche F in kleine Theile $\Delta_1 x,\ \Delta_2 x,\ \ldots\ \Delta_m x$ und die Differenz der äussersten Ordinaten CD in kleine Theile $\Delta_1 y,\ \Delta_2 y,\ \Delta_3 y\ \ldots\ \Delta_n y$ theilt, und durch die Theilpunkte Parallelen zu den Achsen zieht, so entstehen mn Rechtecke, von denen ein Theil ganz ins Innere der Fläche f fällt. Die Summe dieser letzteren Rechtecke ist kleiner, als f und convergirt gegen den Grenzwerth f, wenn die Δx und Δy verschwindend klein werden; man kann daher in der Gleichung



(M. 524.)

1. $$\int z\,df = lim\, \Sigma z_k \Delta_k f$$

diese Rechtecke als die Flächentheile Δf benutzen, also, wenn man den Index weglässt, Δf durch $\Delta x \Delta y$ ersetzen. Um den Uebergang zur Grenze anzudeuten, hat man Δf, Δx und Δy gegen df, dx und dy zu vertauschen und gewinnt so für 1. die besondere Darstellung

2. $$\int z\,df = \int z\,dx\,dy = lim\, \Sigma z \Delta x \Delta y .$$

Die Berechnung des Grenzwerthes kann geordnet in folgender Weise geschehen: Man addire zunächst die Elemente der Summe, die zu demselben $\Delta x = EF$ gehören, also zwischen zwei benachbarten Ordinaten liegen; für diese Summanden ist Δx ein gemeinsamer Faktor, und x kann in Rücksicht auf den vorzunehmenden Grenzübergang in dem Faktor $z = \varphi(x, y)$ constant gleich OE (oder OF) genommen werden. Deutet man diese Summation bei unveränderlichem x durch das Zeichen Σ_1 an, so ist die Summe dieser Elemente

$$\Delta x \cdot \Sigma_1\, z \Delta y .$$

Geht man hier zur Grenze für verschwindende Δy über, so entsteht

$$\Delta x\, lim\, \Sigma_1\, z \Delta y .$$

Nun ist aber der Grenzwerth das bestimmte Integral von $z\,dy$, ausgedehnt über den im Innern der Fläche f liegenden Theil der in E (oder F) errichteten Ordinate; unter Berücksichtigung dieser Grenzen ist daher

$$\Delta x\, lim\, \Sigma_1 z \Delta y = \Delta x \cdot \int z\,dy .$$

Setzt man hierin für Δx der Reihe nach alle Theile von AB, addirt die so erhaltenen Produkte, und geht dann zur Grenze für verschwindende Δx über, so erhält man

$$lim\, \Sigma z \Delta x \Delta y = lim\, \Sigma \Delta x\, lim\, \Sigma_1 z \Delta y$$
$$= lim\, \Delta x \int z\,dy .$$

Das innerhalb der angegebenen Grenzen genommene Integral

$$\int z\,dy$$

ist eine Function von x allein; der Grenzwerth rechts ist das von der kleinsten biz zur grössten Abscisse der Fläche f erstreckte Integral

$$\int \left(\int z\,dy\right) dx .$$

Es ist gebräuchlich die Klammern wegzulassen und das Differential der Variabeln, nach welcher zuerst integrirt wird, an die letzte Stelle zu setzen.

Das über eine begrenzte Fläche f erstreckte Integral

$$\int \varphi(x, y)\,df$$

wird daher durch zweimalige Integration gefunden; man denke sich zunächst x constant und berechne das bestimmte Integral

$$\int \varphi(x, y)\,dy ,$$

erstreckt über den Theil der durch das Ende von x gehenden Normalen zu OX, der innerhalb der Fläche f liegt; dieses Integral ist eine Function von x allein; hierauf berechne man das Integral

$$\int \left[\int \varphi(x, y)\,dy\right] dx$$

erstreckt von der kleinsten bis zur grössten Abscisse der Fläche f.

Man kann in dieser Betrachtung die Coordinaten x und y gegen einander vertauschen und gewinnt dann die folgende Regel: Um das über die Fläche f erstreckte Integral

$$\int \varphi(x, y)\,df$$

zu erhalten, denke man sich zunächst y constant (z. B. gleich OG) und berechne das bestimmte Integral

$$\int \varphi(x, y)\,dx ,$$

erstreckt über den Theil der zu y gehörigen Normalen zu OY, der innerhalb f liegt; dieses Integral ist eine Function von y allein; hierauf berechne man das Integral

$$\int \left[\int \varphi(x, y)\,dx\right] dy ,$$

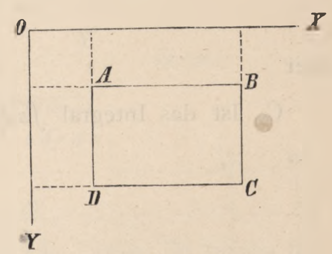
erstreckt von der kleinsten bis zur grössten Ordinate der Fläche f.

Da die über Flächen erstreckten Integrale durch zweimalige bestimmte Integration gefunden werden, so bezeichnet man sie als bestimmte Doppelintegrale.

4. Wir wollen nun an einigen Beispielen die Grenzen der aufeinander folgenden Integrationen bestimmen.

A. Ist die Fläche f ein Rechteck $ABCD$, dessen Seiten den Coordinatenachsen parallel sind, und in welchen AD und BC die Abscissen a und a_1, AB und DC die Ordinaten b und b_1 haben, so ist

$$\int z\,df = \int_a^{a_1} \int_b^{b_1} z\,dx\,dy ,$$
$$= \int_b^{b_1} \int_a^{a_1} z\,dy\,dx .$$



(M. 525.)

Wenn beide Integrationen zwischen constanten Grenzen erfolgen, so kann daher die Reihenfolge der Integrationen ohne Aenderung der Grenzen gewechselt werden.

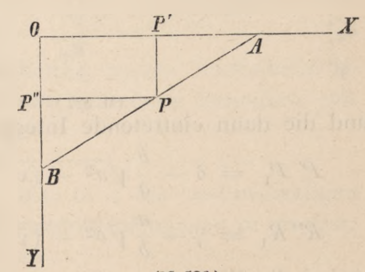
Die Bedingung, dass das Doppelintegral über die Fläche des Rechtecks ausgedehnt werden soll, kann durch die Ungleichungen ersetzt werden

$$a \leqq x \leqq a_1 ; \quad b \leqq y \leqq b_1 .$$

B. Ist die Fläche f das Dreieck OAB, dessen Hypotenuse AB die Gleichung hat

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0 ,$$

so gehört zu einer gegebenen Abscisse die Ordinate



(M. 526.)

$$y = \frac{b}{a}(a - x),$$

zu einer gegebenen Ordinate die Abscisse

$$x = \frac{a}{b}(b - y).$$

Integrirt man zuerst nach y bei unverändertem x, so hat sich diese Integration über die $P'P$ zu erstrecken, also $y = 0$ bis $y = b(a - x) : a$; die nachfolgende Integration in Bezug auf x erstreckt sich über OA, also von $x = 0$ bis $x = a$; daher hat man

$$\int z\,df = \int_0^a \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} z\,dx\,dy\,.$$

Integrirt man dagegen zuerst nach x bei unverändertem y, so erstreckt sich diese Integration über die Strecke $P''P$, und die darauf folgende Integration nach y über die Strecke OB; folglich ist

$$\int z\,df = \int_0^a \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} z\,dx\,dy = \int_0^b \int_0^{a\left(1-\frac{y}{b}\right)} z\,dy\,dx\,.$$

Um den Spielraum für x und y analytisch zu definiren, bemerken wir, dass die Function

$$T(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1$$

für alle Punkte auf derselben Seite der Geraden AB dasselbe Vorzeichen hat, also für alle mit O auf derselben Seite liegenden Punkte negativ ist, da für die Coordinaten des Nullpunkts sich $T(0, 0) = -1$ ergiebt. Die Bedingung, dass das Doppelintegral

$$\iint z\,dx\,dy$$

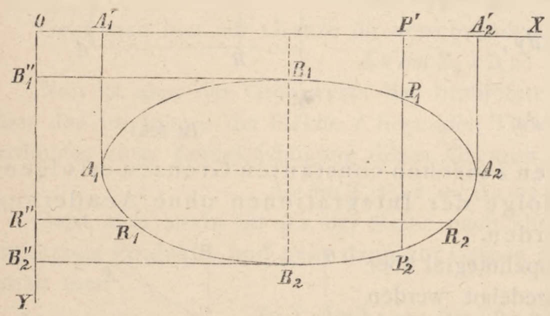
über die Dreiecksfläche OAB auszudehnen ist, kann also durch die Bedingung ersetzt werden, dass x und y alle positiven Werthe annehmen, für welche

$$-1 \leqq \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \leqq 0,$$

oder

$$0 \leqq \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leqq 1\,.$$

C. Ist das Integral $\int z\,df$ über eine Ellipse erstreckt, deren Halbachsen a und b den Coordinatenachsen parallel sind und deren Centrum die Coordinaten γ und δ hat, und beginnt man die Berechnung mit der Integration nach y, so erstreckt sich dieselbe über P_1P_2, und die nachfolgende Integration nach x über $A_1'A_2'$. Beginnt man dagegen mit der Integration in Bezug auf x, so erstreckt sich diese über R_1R_2 und die dann eintretende Integration nach y über $B_1''B_2''$. Da nun



(M. 527.)

$$P'P_1 = \delta - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (x-\gamma)^2}, \quad P'P_2 = \delta + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (x-\gamma)^2},$$

$$R''R_1 = \gamma - \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - (y-\delta)^2}, \quad R''R_2 = \gamma + \frac{a}{b}\sqrt{a^2 - (y-\delta)^2},$$

wobei die Wurzeln positiv zu rechnen sind, so ergeben sich die Grenzen

$$\int z\,df = \int_{\gamma-a}^{\gamma+a} \int_{\delta-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(x-\gamma)^2}}^{\delta+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(x-\gamma)^2}} z\,dx\,dy\,,$$

$$= \int_{\delta-b}^{\delta+b} \int_{\gamma-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-(y-\delta)^2}}^{\gamma+\frac{a}{b}\sqrt{b^2-(y-\delta)^2}} z\,dy\,dx\,.$$

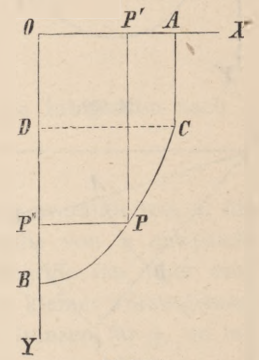
Für alle Punkte des Perimeters von f ist

$$\varphi(x, y) = \frac{(x-\gamma)^2}{a^2} + \frac{(y-\delta)^2}{b^2} - 1 = 0;$$

für alle Punkte ausserhalb der geschlossenen Ellipsenfläche hat die Function φ dasselbe Zeichen, für alle Punkte innerhalb das entgegengesetzte. Da nun für das Centrum der Ellipse $\varphi(\gamma, \delta) = -1$ ist, so folgt, dass φ für alle Punkte im Innern von f negativ ist. Beachten wir ferner, dass φ im Centrum den kleinsten Werth hat, so haben wir für das Doppelintegral die analytische Begrenzung

$$-1 \leqq \frac{(x-\gamma)^2}{a^2} + \frac{(y-\delta)^2}{b^2} - 1 \leqq 0\,.$$

D. Wird die Fläche f von den Coordinatenachsen, von einer zur Abscisse $OA = a$ gehörigen Parallelen zur Y-Achse und von einer Parabel begrenzt, die den Scheitel B, die Achse OY und den Parameter p hat, so ist



(M. 528.)

$$P'P = b - \frac{x^2}{2p}\,.$$

Folglich ist

$$\int z\,df = \int_0^a \int_0^{b-\frac{x^2}{2p}} z\,dx\,dy\,.$$

Will man zuerst nach x integriren, so zerlegt man die Fläche f in das Rechteck $OACD$, dessen Seiten sind

$$OA = a, \quad OD = AC = b - \frac{a^2}{2p},$$

und in das Parabelsegment DBC; man hat nun

$$\int z\,df = \int_0^{b-\frac{a^2}{2p}} \int_0^a z\,dy\,dx + \int_{b-\frac{a^2}{2p}}^{b} \int_0^{\sqrt{2p(b-y)}} z\,dy\,dx\,.$$

Die Function

$$x^2 - 2p(b-y)$$

verschwindet für die Punkte der Parabel, und ist für alle Punkte im Innern der Fläche f grösser, als für O, und von demselben Vorzeichen; statt anzugeben, dass das Doppelintegral $\iint z\,dy\,dx$ über die Fläche $OACB$ zu erstrecken ist, hat man daher die Bedingungen

$$0 \leqq x \leqq a; \quad y > 0; \quad -2pb \leqq x^2 - 2p(b-y) \leqq 0\,.$$

---

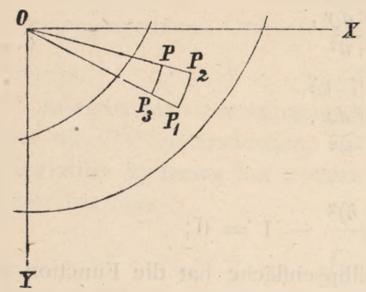
5. Wir beschäftigen uns nun mit der **Einführung neuer Variabeln in Doppelintegrale**, und beginnen diese Untersuchung mit einem besonders einfachen Beispiele. Will man in das Doppelintegral

$$\iint z\,dx\,dy$$

Polarcoordinaten r und φ einführen, so hat man in z die rechtwinkeligen Coordinaten x und y durch r und φ nach den bekannten Gleichungen zu ersetzen

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi\,.$$

Ferner hat man das Flächendifferential df durch r und φ auszudrücken, Haben P und P_1 die Polarcoordinaten r, φ und $r + \Delta r$, $\varphi + \Delta\varphi$, so ist das kleine Flächenstück $P P_2 P_1 P_3$



(M. 529.)

$$\Delta f = \tfrac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \Delta\varphi - \tfrac{1}{2} r^2 \Delta\varphi$$
$$= \left(r + \frac{\Delta r}{2}\right) \Delta r \Delta\varphi .$$

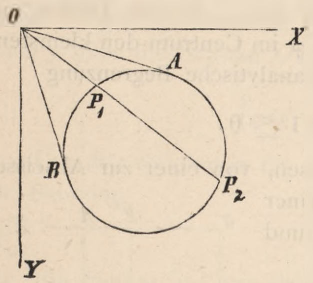
Geht man zur Grenze für verschwindende Δr und $\Delta\varphi$ über, so erhält man

$$df = r\, dr\, d\varphi .$$

Daher ist

1. $$\iint z\, dx\, dy = \iint z r\, d\varphi\, dr .$$

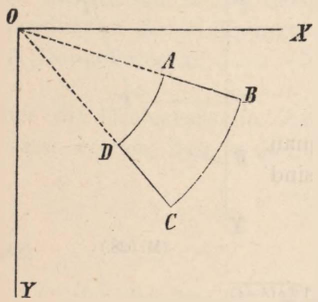
Will man, wie hier angedeutet, zuerst nach r integriren, so hat man das Integral über die Strecke $P_1 P_2$ (Fig. 530) des Strahles OP_2 auszudehnen, die im Innern von f liegt; die Grenzen für die darauf folgende Integration nach φ sind der grösste und kleinste Werth von φ, die bei f vorkommen, also die Arcus der Winkel AOX und BOX.



(M. 530.)

Ist f ein Sector eines Kreisringes $ABCD$ mit Centrum O, dessen äusserste Radien und Polarwinkel a, a_1 und β, β_1 sind, so wird die Integration nach y und x wegen der Begrenzung von f sehr unbequem; man müsste das Integral in drei Theile zerfällen; für Polarcoordinaten wird die Arbeit viel einfacher, denn man hat

$$\int z\, df = \int_{\beta}^{\beta_1} \int_{a}^{a_1} z r\, d\varphi\, dr .$$



(M. 531.)

Ist f eine Kreisfläche O mit dem Radius a, so hat man

$$\int z\, df = \int_0^{2\pi} \int_0^{a} z r\, d\varphi\, dr .$$

6. Die Transformationsgleichung No. 5, 1 kann auch unabhängig von geometrischen Betrachtungen in folgender Weise hergestellt werden.

In dem gegebenen Integrale ersetze man die Variable y, mit der die Integration beginnen soll, durch die neue Variable r. Die Substitutionsformel für y wird aus den beiden Gleichungen

$$x = r\cos\varphi , \quad y = r\sin\varphi$$

durch Elimination von φ gewonnen.

Wenn x und y sich um dx und dy ändern, so hat man für die zugehörigen Aenderungen von r und φ

1. $$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi ,$$
2. $$dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi .$$

Bei der Integration nach y bleibt x unverändert, daher hat man in 1. $dx = 0$ zu nehmen, und aus den beiden Gleichungen

$$0 = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi ,$$
$$dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi$$

das Differential $d\varphi$ zu eliminiren; man erhält

3. $$\sin\varphi\, dy = dr , \quad dy = dr : \sin\varphi .$$

Setzt man dies in das gegebene Integral, so entsteht

4. $$\iint z\, dx\, dy = \iint z \cdot \frac{1}{\sin\varphi}\, dx\, dr ,$$

wobei man sich $\sin\varphi$ durch x und r ausgedrückt denken muss. Die Grenzen der Integration nach r sind hier den Grenzen der Integration nach y entsprechend zu nehmen; der analytische Spielraum für x und r ergiebt sich aus der Ungleichung bez. den Ungleichungen, die den Spielraum von x und y angeben, indem in denselben y durch r und x ausdrückt.

In dem Integrale

$$\iint z \frac{1}{\sin\varphi}\, dx\, dr$$

ändere man nun die Anordnung der Integrationen und bestimme der neuen Anordnung entsprechend die Grenzen; in dem somit erhaltenen Integrale

$$\iint z \cdot \frac{1}{\sin\varphi}\, dr\, dx$$

ersetze man x durch r und φ. Da bei der Integration nach x die Variable r ungeändert bleibt, so hat man für dx den Werth zu setzen, der sich aus der Substitutionsformel

$$x = r\cos\varphi$$

unter Voraussetzung eines constanten r ergiebt, also

5. $$dx = -r\sin\varphi\, d\varphi .$$

Die Grenzen der Integration nach φ sind denen für die Integration nach x entsprechend zu bestimmen. Man gewinnt somit

6. $$\iint z\, dx\, dy = -\iint z r\, d\varphi\, dr .$$

Aus 5. geht hervor, dass im Quadranten XOY bei unverändertem r die Variable φ abnimmt, wenn x wächst; dem grössten Werthe von x entspricht daher der kleinste von φ und umgekehrt. Nach dem Begriffe des über eine Fläche genommenen Integrals werden die unteren Grenzen kleiner vorausgesetzt als die oberen. Vertauscht man im letzten Integrale die Grenzen für φ, so hat man das Vorzeichen zu wechseln. Unter dieser Voraussetzung erhält man nun in Uebereinstimmung mit No. 5, 1

$$\iint z\, dx\, dy = \iint z r\, d\varphi\, dr .$$

6. Wir wenden uns nun zu den allgemeinen Transformationsformeln für Doppelintegrale.

Um für x und y neue Variable λ und μ einzuführen, die mit x und y durch die Gleichungen zusammenhängen

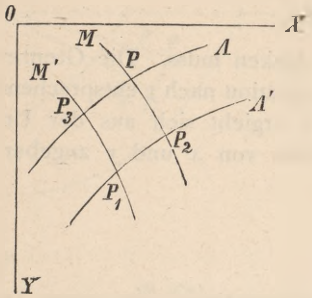
1. $$x = \psi(\lambda, \mu) , \quad y = \chi(\lambda, \mu) ,$$

betrachten wir die Curven, für deren Punkte λ, bez. μ constant sind; die Gleichung einer Curve der ersten Art erhalten wir, indem wir μ aus 1. eliminiren, die einer Curve der zweiten Art durch Elimination von λ. Diese Curven bezeichnen wir als die Parametercurven λ und μ, und die Werthe λ und μ, die einem gegebenen Punkte P entsprechen, als die Parameter (oder Coordinaten im weitesten Sinne) des Punktes.

Für Polarcoordinaten r und φ sind die Parametercurven λ Strahlen durch den Nullpunkt und die Parametercurven μ Kreise um den Nullpunkt.

Wir werden nun unsere Betrachtungen auf solche Transformationen beschränken, bei denen im Allgemeinen zu jedem realen Werthepaare x, y ein und nur ein reales Werthepaar λ, μ gehört, bei welchen also jeder Punkt einen realen Parameter λ und einen realen Parameter μ besitzt. Alsdann geht durch jeden

Punkt P im Allgemeinen eine Parametercurve λ und eine Parametercurve μ; dies



(M. 532.)

mögen die Curven Λ und M sein. Wächst λ um $\Delta\lambda$ und μ um $\Delta\mu$, so erhält man zwei neue Parametercurven Λ' und M'; da nach der Voraussetzung zu jedem P nur ein λ und μ gehört, so schneiden sich Λ und Λ' nicht, ebensowenig M und M'. Geht man nun für $\Delta\lambda$ und $\Delta\mu$ zur Grenze Null über, so wird $PP_2P_1P_3$ ein verschwindend kleines Viereck, und die Curvenbögen können mit den Sehnen verwechselt werden. Da PP_3 und P_2P_1, sowie PP_2 und P_3P_1 dabei zu unendlich nahen Geraden werden, und sich nicht schneiden, so folgt, dass $PP_2P_1P_3$ beim Uebergange zur Grenze ein verschwindend kleines Parallelogramm wird. Der Inhalt desselben ist

$$df = sin\tau d\rho d\varsigma,$$

wenn man mit τ den Winkel bezeichnet, unter dem sich die Parametercurven in P durchschneiden, und mit $d\rho$ und $d\varsigma$ die an P liegenden Bogenelemente von Λ und M.

Die unendlich kleinen Aenderungen, welche den Coordinaten von P ertheilt werden müssen, um zum Punkte P_3 zu gelangen, gehen durch Differentiation aus 1. hervor unter der Voraussetzung, dass λ constant ist. Man hat daher

2. $$dx = \frac{\partial\psi}{\partial\mu}d\mu, \quad dy = \frac{\partial\chi}{\partial\mu}d\mu.$$

Sind ferner δx und δy die unendlich kleinen Aenderungen, welche man den Coordinaten von P ertheilen muss, um zu P_2 zu gelangen, so hat man

3. $$\delta x = \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}d\lambda, \quad \delta y = \frac{\partial\chi}{\partial\lambda}d\lambda.$$

Ferner ist

4. $$d\rho = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad d\varsigma = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}, \quad sin\tau = \frac{dy}{d\rho}\cdot\frac{\delta x}{d\varsigma} - \frac{dx}{d\varsigma}\cdot\frac{\delta y}{d\varsigma}.$$

Hieraus folgt weiter

$$df = sin\tau d\rho d\varsigma = dx\,\delta y - dy\,\delta x,$$

und daher mit Hülfe der Werthe 2. und 3.

$$df = \pm\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\mu} - \frac{\partial\psi}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\lambda}\right)d\mu d\lambda.$$

Da df positiv ist, so ist das obere oder untere Vorzeichen anzuwenden, je nachdem der Klammerinhalt positiv oder negativ ist.

Damit erhalten wir schliesslich die Transformationsformel

$$\iint z\,dx\,dy = \pm\iint z\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\mu} - \frac{\partial\psi}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\lambda}\right)d\lambda d\mu.$$

Beginnt man, wie hier angedeutet, mit der Integration nach μ, so hat man die Grenzen so zu bestimmen, dass sie dem innerhalb f liegenden Theile einer Parametercurve Λ entsprechen; für die nachfolgende Integration nach λ sind die Grenzen der kleinste und grösste auf f vorkommende Werth von λ.

8. Zur weiteren Erläuterung führen wir die Substitution elliptischer Coordinaten aus (vergl. Differentialrechnung § 5, No. 14).

Sind a und b positive Zahlen und ist $a > b$, so genügen der Gleichung

$$\frac{x^2}{a+\tau} + \frac{y^2}{b+\tau} - 1 = 0$$

bekanntlich zwei reale Werthe von τ, von denen der eine λ zwischen $-a$ und $-b$ liegt, und der andere μ grösser ist als $-b$.

Nimmt man λ und μ als neue Variable, so sind die Parametercurven Kegelschnitte, die der Ellipse

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 1 = 0$$

confocal sind; und zwar sind die Curven Λ Hyperbeln, die Curven M Ellipsen. Die Parameter λ, μ eines Punktes hängen mit den Coordinaten x, y durch die Gleichungen zusammen

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} = 1, \quad \frac{x^2}{a+\mu} + \frac{y^2}{b+\mu} = 1.$$

Aus ihnen ergeben sich die Substitutionsformeln

$$x = \sqrt{\frac{(a+\lambda)(a+\mu)}{a-b}}, \quad y = \sqrt{\frac{(b+\lambda)(b+\mu)}{b-a}}.$$

Für die Punkte der Y-Achse ist $x = 0$ und daher ist $\lambda = -a$, hat also den kleinsten vorkommenden Werth; der andere Parameter μ ergiebt sich aus der Gleichung $y = \sqrt{b+\mu}$; für die Punkte der X-Achse ist $y = 0$, $\lambda = -b$; μ ergiebt sich aus $x = \sqrt{a+\lambda}$.

Für ein Bogendifferential auf Λ hat man

$$d\rho^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial\mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\mu}\right)^2\right]d\mu^2 = \frac{d\mu^2}{4}\cdot\frac{\mu-\lambda}{(a+\mu)(b+\mu)};$$

für ein Bogendifferential auf M

$$d\varsigma^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2\right]d\lambda^2 = \frac{d\lambda^2}{4}\cdot\frac{\lambda-\mu}{(a+\lambda)(b+\lambda)}.$$

Da die Parametercurven Λ und M sich unter rechten Winkeln schneiden, so ist ein beliebiges Bogendifferential

$$ds^2 = d\rho^2 + d\varsigma^2 = \frac{\lambda-\mu}{4}\cdot\left[\frac{d\lambda^2}{(a+\lambda)(b+\lambda)} - \frac{d\mu^2}{(a+\mu)(b+\mu)}\right],$$

und das Flächendifferential

$$df = d\rho\,d\varsigma = \frac{1}{4}\cdot\frac{(\lambda-\mu)\,d\mu.d\lambda}{\sqrt{-(a+\mu)(b+\mu)(a+\lambda)(b+\lambda)}}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel hat man hier übereinstimmend mit dem Vorzeichen von $\lambda - \mu$ zu wählen.

Man hat daher die Transformation

1. $$\iint\varphi(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{4}\iint\varphi\left(\sqrt{\frac{(a+\lambda)(a+\mu)}{a-b}}, \sqrt{\frac{(b+\lambda)(b+\mu)}{b-a}}\right) \times\frac{\lambda-\mu}{\sqrt{-(a+\mu)(b+\mu)(a+\lambda)(b+\lambda)}}d\lambda\,d\mu.$$

Soll das Integral über den innerhalb XOY liegenden Quadranten der Ellipse

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 1 = 0$$

ausgedehnt werden, und beginnt man mit der Integration nach λ, so hat man dieselbe über den Quadranten der Ellipse zu erstrecken

$$\frac{x^2}{a+\mu} + \frac{y^2}{b+\mu} - 1 = 0.$$

Dem auf der X-Achse liegenden Scheitel dieser Ellipse gehört der Parameter $\lambda = -b$, dem auf der Y-Achse liegenden $\lambda = -a$ zu; die Integration nach λ erfolgt daher zwischen den Grenzen $-a$ und $-b$. Da ferner für die an die

X-Achse sich anschmiegende Curve M der Parameter $\mu = -b$ und für die begrenzende Curve $\mu = 0$ ist, so hat man die Transformation

$$2. \quad \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \varphi \, dx \, dy = \frac{1}{4} \int_{-b}^{0} \int_{-a}^{-b} \varphi \cdot \frac{\mu - \lambda}{\sqrt{-(a+\mu)(b+\mu)(a+\lambda)(b+\lambda)}} \, d\mu \, d\lambda \, .$$

Da innerhalb des ganzen Integrationsgebiets $\lambda < \mu$, so ist statt des Zählers $\lambda - \mu$ in 1. hier $\mu - \lambda$ gesetzt worden; in Uebereinstimmung hiermit ist die Wurzel im Nenner positiv zu rechnen.

---

9. Berechnung von Oberflächen. Um das Stück F der Oberfläche $\varphi(x, y, z) = 0$ zu erhalten, das eine gegebene Horizontalprojection f hat, zerlegen wir f in kleine Theile Δf und durchschneiden F durch die Mäntel der parallel der Z-Achse erstreckten Cylinder, welche Δf zu Normalschnitten haben; hierdurch zerfällt F in ebensoviel Theile wie f, die wir mit ΔF bezeichnen. Legen wir nun in irgend einem Punkte innerhalb jedes ΔF eine Tangentenebene an F und bezeichnen das Stück derselben, dessen Horizontalprojection mit Δf zusammenfällt, mit ΔT, so stimmen die Summen $\Sigma \Delta F$ und $\Sigma \Delta T$ um so genauer überein, je kleiner die Normalschnitte Δf sind. Geht man zur Grenze für verschwindend kleine Δf über, so erhält man

$$F = lim \, \Sigma \Delta F = lim \, \Sigma \Delta T \, .$$

Ist τ der Winkel, unter dem ΔT gegen die XY-Ebene geneigt ist, so ist bekanntlich

$$\Delta T = \frac{\Delta f}{cos \, \tau} \, ,$$

daher hat man

$$F = lim \, \Sigma \frac{\Delta f}{cos \, \tau} \, ,$$

oder

$$1. \quad F = \int \frac{1}{cos \, \tau} \cdot df = \int\int \frac{1}{cos \, \tau} \, dx \, dy \, .$$

Ist die Gleichung der Fläche $z = \varphi(x, y)$, so ist (Differentialrechnung § 6, No. 1)

$$cos \, \tau = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

und daher

$$2. \quad F = \int\int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy \, .$$

Aus der Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ folgt

$$cos \, \tau = \frac{\partial \varphi}{\partial z} : \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2} \, ,$$

$$3. \quad F = \int\int \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} \cdot dx \, dy \, .$$

10. Für das elliptische Paraboloid ist

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} \, , \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{a} \, , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{b} \, ,$$

$$\frac{1}{cos \, \tau} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2} \, ,$$

$$F = \int\int \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2} \, dx \, dy \, .$$

Führt man neue Variable durch die Gleichungen ein

$$x = a \lambda \, cos \, \mu \, , \quad y = b \lambda \, sin \, \mu \, ,$$

so sind die Parametercurven Λ Ellipsen

$$\left(\frac{x}{a\lambda}\right)^2 + \left(\frac{y}{b\lambda}\right)^2 = 1 \, ,$$

und die Curven M sind Strahlen durch den Nullpunkt, deren Winkel ψ mit der X-Achse sich ergiebt aus

$$tang \, \psi = \frac{b}{a} \, tang \, \mu \, .$$

Nimmt man als Horizontal-Projection f einen Quadranten der Parametercurve $\lambda = k$ so sind die Grenzbedingungen für x und y

$$0 \leqq \frac{x^2}{k^2 a^2} + \frac{y^2}{k^2 b^2} \leqq 1 \, , \quad x \geqq 0 \, , \quad y \geqq 0 \, .$$

Die Grenzbedingung für λ ist

$$0 \leqq \lambda \leqq k \, .$$

Die Grenzen für ψ sind 0 und $\frac{\pi}{2}$; dieselben Grenzen ergeben sich für μ.

Ferner ist

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = a \, cos \, \mu \, , \quad \frac{\partial x}{\partial \mu} = - a \lambda \, sin \, \mu \, ,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = b \, sin \, \mu \, , \quad \frac{\partial y}{\partial \mu} = b \lambda \, cos \, \mu \, ,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial x}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} = ab \lambda \, .$$

Daher hat man für die gesuchte Fläche

$$F = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^k \sqrt{1 + \lambda^2} \cdot \lambda \, d\mu \, d\lambda \, ,$$

$$= \frac{\pi}{6} \, ab \left[(1 + k^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] .$$

Für das hyperbolische Paraboloid ist

$$z = \frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2b}$$

und daher

$$\frac{1}{cos \, \tau} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2} \, ,$$

$$F = \int\int \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2} \, dx \, dy .$$

Hieraus erkennt man: Tangentenebenen, welche die beiden Paraboloide

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0 \, , \quad \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - 2z = 0$$

in Punkten berühren, die dieselbe Projection auf die XY-Ebene haben, sind gleich geneigt gegen die XY-Ebene. Flächenstücke beider Paraboloide, welche dieselbe Projection auf die XY-Ebene haben, sind gleich.

11. Die Gleichung eines **Kegels zweiter Ordnung**, bezogen auf seine Symmetrieebenen, ist

$$z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\,.$$

Hieraus findet man

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{cx}{a^2} : \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\,, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{cy}{b^2} : \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\,,$$

$$\frac{1}{\cos\tau} = \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 x^2}{a^2} + \frac{\beta^2 y^2}{b^2}\right) : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}\,,$$

wenn man abkürzungsweise setzt

$$\frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{a} = \alpha\,, \quad \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{b} = \beta\,.$$

Führt man dieselben Parameter ein wie im vorigen Beispiele, und erstreckt das Integral wieder über einen Quadranten der Parametercurve $\lambda = k$, so erhält man

$$F = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{k} \sqrt{\alpha^2\cos^2\mu + \beta^2\sin^2\mu}\cdot\lambda\, d\mu\, d\lambda$$

1. $$= \frac{abk^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\alpha^2\cos^2\mu + \beta^2\sin^2\mu}\, d\mu\,.$$

Die Punkte

$$x = A\sin\mu\,, \quad y = B\sin\mu$$

liegen auf einer Ellipse mit den Halbachsen A und B. Ein Bogendifferential dieser Ellipse ist

$$ds = \sqrt{A^2\cos^2\mu + B^2\sin^2\mu}\, d\mu$$

und daher der Perimeter eines Quadranten

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{A^2\cos^2\mu + B^2\sin^2\mu}\, d\mu\,.$$

Ersetzt man 1. durch

$$F = \frac{ak}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\alpha^2 k^2 b^2 \cos^2\mu + \beta^2 k^2 b^2 \sin^2\mu}\, d\mu\,,$$

so bemerkt man den Satz: **Der Theil des auf einer Seite der Spitze liegenden Kegelmantels, dessen Projection auf die XY-Ebene eine Ellipse mit den Halbachsen ak und bk ist, ist dem Mantel eines geraden elliptischen Cylinders gleich,** der die Höhe $\frac{1}{2}ak$ und im Normaldurchschnitte die Halbachsen αkb und βkb hat.

12. Wählt man die Achse einer **normalen axialen Schraubenfläche** zu Z-Achse und ihre Horizontalspur zur X-Achse, so ist die Gleichung

$$z = c\cdot \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\,.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{cy}{x^2 + y^2}\,, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{cx}{x^2 + y^2}\,, \quad \frac{1}{\cos\tau} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + c^2}{x^2 + y^2}}\,,$$

$$F = \iint\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + c^2}{x^2 + y^2}}\, dx\, dy\,.$$

Substituirt man Polarcoordinaten und integrirt über eine Fläche, die zwischen den Kreisbogen $r = r_0$ und $r = r_1$ und den Richtungen $\varphi = \varphi_0$ und $\varphi = \varphi_1$ liegt, so hat man

$$F = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1} \sqrt{r^2 + c^2}\, d\varphi\, dr\,,$$

$$= \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_0)\left[r_1\sqrt{r_1^2 + c^2} - r_0\sqrt{r_0^2 + c^2} + c^2\, l\,\frac{r_1 + \sqrt{r_1^2 + c^2}}{r_0 + \sqrt{r_0^2 + c^2}}\right].$$

13. Sind die rechtwinkeligen Coordinaten der Punkte einer Fläche als Functionen zweier unabhängigen Parameter λ, μ gegeben

$$x = \varphi(\lambda, \mu)\,, \quad y = \psi(\lambda, \mu)\,, \quad z = \chi(\lambda, \mu)\,,$$

so hat man zunächst

$$F = \pm\iint\frac{1}{\cos\tau}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial y}{\partial\lambda} - \frac{\partial x}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial\mu}\right) d\lambda\, d\mu\,.$$

Nun hat man in $\cos\tau$ noch die partialen Differentialquotienten von z nach x und y durch λ und μ zu ersetzen. Hierzu bilden wir die partialen Differentialquotienten von z nach λ und μ und erhalten

$$\frac{\partial z}{\partial\lambda} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\lambda} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\lambda}\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial\mu} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\mu} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\mu}\,.$$

Diese beiden Gleichungen sind nach $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ aufzulösen. Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial\lambda} & \frac{\partial y}{\partial\mu} \\ \frac{\partial z}{\partial\lambda} & \frac{\partial z}{\partial\mu} \end{vmatrix} = L\,, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial\lambda} & \frac{\partial z}{\partial\mu} \\ \frac{\partial x}{\partial\lambda} & \frac{\partial x}{\partial\mu} \end{vmatrix} = M\,, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\lambda} & \frac{\partial x}{\partial\mu} \\ \frac{\partial y}{\partial\lambda} & \frac{\partial y}{\partial\mu} \end{vmatrix} = N\,,$$

so erhält man

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{L}{N}\,, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{M}{N}\,,$$

hieraus folgt

$$\frac{1}{\cos\tau} = \frac{1}{N}\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}\,,$$

und schliesslich

$$F = \pm\iint\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}\, d\lambda\, d\mu\,.$$

Wir wenden diese Formel auf **räumliche Polarcoordinaten** an, und benutzen als solche den Abstand r eines Punktes vom Nullpunkte, den Winkel μ, den r mit OX einschliesst und den Winkel λ, unter welchem die Ebene des Winkels μ gegen die XY-Ebene geneigt ist. Die Substitutionsformeln zum Uebergange aus rechtwinkeligen Coordinaten sind

$$x = r\cos\mu\,, \quad y = r\sin\mu\cos\lambda\,, \quad z = r\sin\mu\sin\lambda\,.$$

Aus der Gleichung der Fläche in Polarcoordinaten

$$r = f(\lambda, \mu)$$

kann man r in x, y, z einsetzen, und erhält dann die Coordinaten der Flächenpunkte durch die Parameter λ und μ ausgedrückt.

Für die partialen Differentialquotienten der rechtwinkeligen Coordinaten nach λ und μ ergiebt sich nun

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \cos\mu \frac{\partial r}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial x}{\partial \mu} = \cos\mu \frac{\partial r}{\partial \mu} - r\sin\mu,$$
$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \sin\mu\left(\cos\lambda \frac{\partial r}{\partial \lambda} - r\sin\lambda\right), \qquad \frac{\partial y}{\partial \mu} = \sin\lambda\left(\sin\mu \frac{\partial r}{\partial \mu} + r\cos\mu\right),$$
$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = \sin\mu\left(\sin\lambda \frac{\partial r}{\partial \lambda} + r\cos\lambda\right), \qquad \frac{\partial z}{\partial \mu} = \sin\lambda\left(\sin\mu \frac{\partial r}{\partial \mu} + r\cos\mu\right).$$

Hieraus ergeben sich folgende Werthe für die Determinanten L, M, N:

$$L = -r\sin\mu\left(\sin\mu \frac{\partial r}{\partial \mu} + r\cos\mu\right),$$
$$M = r\left[\left(\cos\mu \frac{\partial r}{\partial \mu} - r\sin\mu\right)\sin\mu\cos\lambda - \sin\lambda \frac{\partial r}{\partial \lambda}\right],$$
$$N = r\left[\left(\cos\mu \frac{\partial r}{\partial \mu} - r\sin\mu\right)\sin\mu\sin\lambda + \cos\lambda \frac{\partial r}{\partial \lambda}\right].$$

Hieraus erhält man zunächst

$$M^2 + N^2 = r^2\left[\left(\cos\mu \frac{\partial r}{\partial \mu} - r\sin\mu\right)^2 \sin^2\mu + \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2\right],$$

und dann weiter

$$L^2 + M^2 + N^2 = r^2\left\{\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \mu}\right)^2 + r^2\right]\sin^2\mu + \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2\right\}.$$

Daher ist schliesslich

1. $$F = \iint\sqrt{\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \mu}\right)^2 + r^2\right]\sin^2\mu + \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2} \cdot r\,d\lambda\,d\mu.$$

Die Cosinus der Winkel der Normalen der Fläche mit den Achsen sind bekanntlich (Differentialrechnung § 6, No. 1)

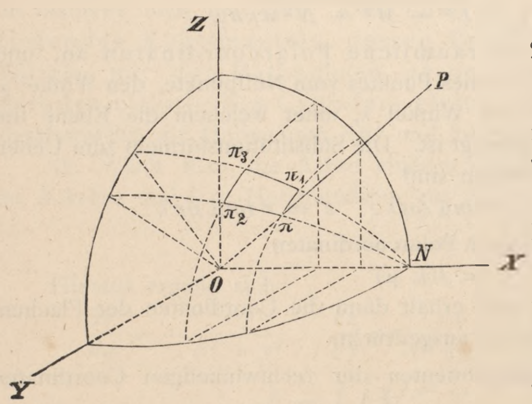
$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \quad \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Ersetzt man die partialen Differentialquotienten durch L, M, N, so entsteht

$$-\frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad -\frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad -\frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

Hieraus ergiebt sich für den Winkel ν, den die Normale mit dem Radius vector bildet,

$$\cos\nu = -\frac{xL + yM + zN}{r\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}} = \frac{r^2\sin\mu}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$



(M. 533.)

Man hat daher

2. $$F = \iint \frac{r^2}{\cos\nu}\sin\mu\,d\lambda\,d\mu.$$

Zu dieser Formel gelangt man auch durch folgende geometrische Betrachtung.

Beschreibt man um den Nullpunkt eine Kugel, deren Radius $= 1$ ist, bezeichnet ihren Schnittpunkt N mit der X-Achse als Pol und zählt die Meridiane von der XY-Ebene an, so ist μ die Poldistanz und λ die Länge der Centralprojection Π des Punktes P

auf die Kugel. Das kleine Flächenstück $\Pi\Pi_1\Pi_3\Pi_2$ der Kugel, das zwischen den Meridianen λ und $\lambda + \Delta\lambda$ und den Breitenkreisen μ und $\mu + \Delta\mu$ liegt, nähert sich beim Uebergange zu verschwindend kleinen $\Delta\lambda$ und $\Delta\mu$ einem Rechtecke aus den Seiten

$$\lim \Pi\Pi_1 = \sin\mu\,d\lambda, \quad \lim \Pi\Pi_2 = d\mu.$$

Wir projiciren dieses Kugelelement $\Delta S = \Pi\Pi_1\Pi_3\Pi_2$ von O aus auf die Tangentenebene der Fläche im Punkte P und auf eine Ebene, die durch Π parallel zu dieser Tangentenebene gelegt ist; die erstere Projection sei ΔF, die letztere $\Delta\Phi$; diese beiden Projectionen hängen durch die Gleichung zusammen

$$\Delta F = r^2 \cdot \Delta\Phi.$$

Geht man nun zur Grenze für verschwindend kleine ΔS über, so kann man ΔF mit einem Elemente der gegebenen Oberfläche, und ΔS mit der Normalprojection der Fläche $\Delta\Phi$ auf die Tangentenebene der Kugel in Π verwechseln; man hat daher

$$d\Phi = \frac{dS}{\cos\nu} = \frac{1}{\cos\nu}\sin\mu\,d\lambda\,d\mu,$$

folglich

$$dF = \frac{r^2}{\cos\nu}\sin\mu\,d\lambda\,d\mu,$$

und schliesslich

3. $$F = \iint \frac{r^2}{\cos\nu}\sin\mu\,d\lambda\,d\mu.$$

§ 10. Dreifache bestimmte Integrale.

1. Ein gegebenes begrenztes Volumen v theilen wir auf irgend welche Weise in kleine Theile

$$\Delta_1 v, \quad \Delta_2 v, \quad \Delta_3 v, \quad \ldots \Delta_k v \ldots,$$

und bezeichnen mit $f_k(x, y, z)$ den Werth, den die Function $f(x, y, z)$ für irgend einen im Innern von Δv gelegenen Punkt annimmt.

Unter dem über das Volumen v erstreckten Integrale

$$\int f(x, y, z)\,dv$$

verstehen wir alsdann den Grenzwerth, gegen den die Summe

$$\Sigma f_k(x, y, z)\,\Delta_k v$$

für verschwindend kleine Werthe der Δv convergirt, wenn dabei die Summation über alle in v enthaltenen Volumenelemente ausgedehnt wird. Es ist also

1. $$\int f(x, y, z)\,dv = \lim \Sigma f(x, y, z)\,\Delta v,$$

wobei rechts der Index k unterdrückt worden ist.

Dieses Integral hat eine einfache mechanische Bedeutung. Unter dem specifischen Gewichte eines homogenen Körpers (d. i. bei welchem gleiche Volumina gleiche Gewichte haben) versteht man den Quotienten aus Gewicht und Volumen; das Gewicht eines gegebenen Volumens eines homogenen Körpers ist daher das Produkt aus dem Volumen und dem specifischen Gewichte. Ist ein Körper nicht homogen, so versteht man unter dem an einem Punkte x, y, z vorhandenen specifischen Gewichte den Grenzwerth des Quotienten

$$\Delta\gamma : \Delta v.$$

Hierbei bedeutet Δv einen kleinen Theil des Körpers, in welchem der Punkt x, y, z liegt, und $\Delta\gamma$ das Gewicht dieses Theiles.

Es bedeute nun die Function $f(x, y, z)$ das specifische Gewicht im Punkte

x, y, z eines Körpers vom Volumen v; ferner bedeute $\mathfrak{f}_k(x, y, z)$ das kleinste und $\mathfrak{F}_k(x, y, z)$ das grösste innerhalb $\Delta_k v$ vorhandene specifische Gewicht. Ist nun G das Gewicht des Körpers, so hat man die Begrenzungen

$$\Sigma \mathfrak{f}_k(x, y, z)\,\Delta_k v < G < \Sigma \mathfrak{F}_k(x, y, z)\,\Delta_k v\,,$$

$$\Sigma \mathfrak{f}_k(x, y, z)\,\Delta_k v < \Sigma f_k(x, y, z)\,\Delta_k v < \Sigma \mathfrak{F}_k(x, y, z)\,\Delta_k v\,.$$

Verschwinden die Δv, so gehen die Grenzen in einander über, und man hat daher

$$\int f(x, y, z)\,dv = lim\,\Sigma f(x, y, z)\,\Delta v = G\,.$$

Das über ein Volumen v erstreckte bestimmte Integral $\int f dv$ giebt also das Gewicht eines Körpers an, der das Volumen v erfüllt, und dessen specifisches Gewicht an jedem Punkte gleich dem Werthe ist, den die Function f für diesen Punkt hat.

Ueber ein Volumen erstreckte Integrale kommen aber auch in mehrfach anderer Bedeutung in der Mechanik vor, von denen wir nur noch eine andeuten wollen. Die Anziehung, die ein Körperelement auf einen Massenpunkt in einer bestimmten Richtung ausübt, ist proportional dem Gewichte des Elements und einer Function φ der Coordinaten desselben, welche die besondere Art der Anziehung charakterisirt. Ist nun f das Produkt aus dem specifischen Gewichte und der Function φ, so giebt $\int f dv$ bis auf einen vom anziehenden Körper unabhängigen auf physikalischem Wege zu ermittelnden Faktor die Gesammtanziehung an, die der angezogene Punkt in der gegebenen Richtung von dem im Volumen v enthaltenen Körper erleidet.

2. Das Integral $\int f dv$ kann je nach der Art, wie man das Volumen V eintheilt, auf sehr verschiedenen Wegen, und zwar immer durch drei auf einander folgende einfache Integrationen berechnet werden.

Durch Parallelebenen zu den Coordinatenebenen zerfällt v in rechtwinkelige Parallelepidede; sind Δx, Δy, Δz die den Achsen parallel gemessenen Kanten des Volumentheils, in dessen Innern der Punkt x, y, z liegt, so hat man

$$\int f(x, y, z)\,dv = lim\,\Sigma f(x, y, z)\,\Delta z\,\Delta y\,\Delta x\,.$$

Addirt man zunächst die Elemente, die zwischen zwei folgenden Normalebenen zur X-Achse liegen, so haben dieselben Δx gemeinsam, und angesichts des Grenzübergangs hat x in der Function f für alle diese Elemente denselben Werth, ist also bei dieser Addition constant. Dieser Theil der Summe ist daher

$$\Delta x \cdot lim\,\Sigma f \cdot \Delta z\,\Delta y = \Delta x \int\int f dy\,dz\,.$$

Dabei ist das Integral über den Querschnitt des Volumens v zu erstrecken, der die Abscisse x hat.

Man hat nun weiter

$$lim\,\Sigma f \cdot \Delta z\,\Delta y\,\Delta x = lim\,\Sigma\left(\int\int f dy\,dz\right)\Delta x = \int\left(\int\int f dy\,dz\right)dx\,.$$

Die Grenzen des Integrals sind dabei die grösste und kleinste Abscisse, zwischen denen das Volumen v enthalten ist.

Unter Einhaltung der angegebenen Grenzen ist daher

$$\int f(x, y\,z)\,dv = \int\int\int f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

3. Ist das Volumen v ein Parallelepiped, das zwischen den Ebenen $x = a_0$, $x = a_1$, $y = b_0$, $y = b_1$, $z = c_0$, $z = c_1$ enthalten ist, so sind diese Coordinaten die Grenzen der Integrale, es ist

$$\int f dv = \int_{a_0}^{a_1}\int_{b_0}^{b_1}\int_{c_0}^{c_1} f dx\,dy\,dz\,.$$

Ordnet man in

$$\Sigma f \Delta z \Delta y \Delta x$$

die Reihenfolge der Addition anders, z. B. so, dass man erst die zwischen zwei Normalebenen zur Y-Achse enthaltenen Volumenelemente addirt, so ergiebt diese Theilsumme

$$\Delta y\,\Sigma f \Delta z \Delta x\,.$$

Hierbei ist y in $f(x, y, z)$ constant. Der Uebergang zur Grenze für verschwindende Δz und Δx liefert

$$\Delta y \int_{a_0}^{a_1}\int_{c_0}^{c_1} f dx dz\,.$$

Hieraus ergiebt sich weiter

$$\int f dv = lim\,\Sigma \Delta y \int_{a_0}^{a_1}\int_{c_0}^{c_1} f dx dz = \int_{b_0}^{b_1}\int_{a_0}^{a_1}\int_{c_0}^{c_1} f dy\,dx\,dz\,.$$

Es ist daher

$$\int_{a_0}^{a_1}\int_{b_0}^{b_1}\int_{c_0}^{c_1} f dx dy dz = \int_{b_0}^{b_1}\int_{a_0}^{a_1}\int_{c_0}^{c_1} f dy\,dx\,dz\,.$$

Auf diesem Wege gewinnt man den Satz: Wenn die Grenzen constant sind, so kann die Reihenfolge der Integrationen geändert werden, ohne dass die Grenzen sich ändern.

Sind die Grenzen nicht constant, so ändern sich mit der Reihenfolge der Integrationen auch die Grenzen.

4. Um die Integration $\int f dv$ in Polarcoordinaten auszuführen, ersetzen wir in f die Coordinaten x, y, z gemäss der Gleichungen

$$x = \rho cos\mu\,,\quad y = \rho sin\mu\,cos\lambda\,,\quad z = \rho sin\mu\,sin\lambda\,.$$

Wir construiren Kugeln S um den Nullpunkt, und bezeichnen mit $\Delta\rho$ die in Richtung eines Radius gemessene Dicke der Schicht zwischen zwei auf einander folgenden Kugeln; hierauf Rotationskegel C, welche OX zur Achse haben und bezeichnen mit $\Delta\mu$ den Winkel der derselben Meridianebene angehörigen Mantellinien zweier auf einander folgenden Kegel; schliesslich Ebenen E durch die X-Achse und bezeichnen mit $\Delta\lambda$ den Winkel zweier auf einander folgenden Ebenen.

Durch den Kegel, dessen Meridian den Winkel μ mit der Achse bildet, wird auf der Kugelfläche mit dem Radius ρ eine Calotte begrenzt, welche die Höhe $\rho(1 - cos\mu)$ hat; also ist der auf dieser Calotte stehende Kugelsector

1. $$2\pi\rho \cdot \rho(1 - cos\mu) \cdot \frac{\rho}{3} = \frac{2\pi}{3}\rho^3(1 - cos\mu)\,.$$

Wächst μ um $\Delta\mu$, so wächst dieser Sector um

$$\frac{2\pi}{3}\rho^3[1 - cos(\mu + \Delta\mu) - (1 - cos\mu)] = \frac{2\pi}{3}\rho^3[cos\mu - cos(\mu + \Delta\mu)]\,.$$

Behält man angesichts des Grenzübergangs nur Glieder mit der ersten Potenz von $\Delta\mu$ bei, so erhält man

2. $$\frac{2\pi}{3}\rho^3 sin\mu\Delta\mu\,.$$

Wächst ferner ρ um $\Delta\rho$, so wächst dieses Volumen um den Ring

$$\frac{2\pi}{3} sin\mu\Delta\mu\,[(\rho + \Delta\rho)^3 - \rho^3]\,;$$

behält man hier von dem Klammerinhalte nur Glieder mit der ersten Potenz von $\Delta\rho$, so entsteht

3. $$2\pi\rho^2 sin\mu\Delta\mu\Delta\rho\,.$$

Der Theil dieses Ringes, der zwischen zwei benachbarten Ebenen E liegt, ist eines von den Volumenelementen, in welche wir jetzt v zertheilt haben; es hat zum Ringvolumen 3. das Verhältniss $\Delta\lambda : 2\pi$; mithin folgt

$$\Delta v = \rho^2 \sin\mu \Delta\mu \Delta\lambda \Delta\rho .$$

Somit ergiebt sich schliesslich

$$\int f dv = \iiint f \cdot \rho^2 \sin\mu . d\rho d\lambda d\mu .$$

Die Grenzen sind hier dem Volumen v entsprechend zu bestimmen.

5. Drückt man x, y, z durch drei neue variable Parameter ρ, λ, μ aus

1. $$x = \varphi(\rho, \lambda, \mu), \quad y = \psi(\rho, \lambda, \mu), \quad z = \chi(\rho, \lambda, \mu),$$

und wählt die Parameter so, dass im Allgemeinen zu jedem Punkte des Volumens v ein und nur ein reales Parametersystem ρ, λ, μ gehört, so kann man die Integration auch in den neuen Variabeln ρ, λ, μ durchführen.

Denkt man sich in den Gleichungen 1. den Parameter ρ gegeben und eliminirt λ und μ, so erhält man eine Gleichung in x, y, z, die ρ enthält; die Fläche, welche diese Gleichung darstellt, enthält alle die Punkte, denen der gegebene Parameterwerth ρ zugehört; wir wollen sie die Parameterfläche P nennen. In gleicher Weise erhalten wir die Parameterflächen Λ und M, welche die Punkte enthalten, denen dasselbe λ oder μ zugehört.

Der Voranssetzung nach schneiden sich zwei Parameterflächen derselben Art nicht; folglich kann das Volumenelement, das von den drei Paar Parameterflächen der Parameter ρ, $\rho + \Delta\rho$, λ, $\lambda + \Delta\lambda$, μ, $\mu + \Delta\mu$ eingeschlossen wird, für verschwindende Werthe von $\Delta\rho$, $\Delta\lambda$, $\Delta\mu$ als Parallelepiped betrachtet werden.

Die drei dem Punkte P benachbarten Ecken P_1, P_2, P_3 dieses Volumenelements erreicht man durch Verschiebungen von P, wenn dabei der Reihe nach λ und μ, μ und ρ, ρ und λ ungeändert bleiben.

Bezeichnet man die Coordinaten von P_i mit $x + \Delta_i x$, $y + \Delta_i y$, $z + \Delta_i z$, so ist daher

$$\Delta_1 x = \frac{\partial x}{\partial \rho}\Delta\rho, \quad \Delta_1 y = \frac{\partial y}{\partial \rho}\Delta\rho, \quad \Delta_1 z = \frac{\partial z}{\partial \rho}\Delta\rho;$$

$$\Delta_2 x = \frac{\partial x}{\partial \lambda}\Delta\lambda, \quad \Delta_2 y = \frac{\partial y}{\partial \lambda}\Delta\lambda, \quad \Delta_2 z = \frac{\partial z}{\partial \lambda}\Delta\lambda;$$

$$\Delta_3 x = \frac{\partial x}{\partial \mu}\Delta\mu, \quad \Delta_3 y = \frac{\partial y}{\partial \mu}\Delta\mu, \quad \Delta_3 z = \frac{\partial z}{\partial \mu}\Delta\mu .$$

Das Volumen eines Tetraëders, dessen Ecken die Coordinaten $x_i y_i z_i$ haben, stimmt bekanntlich dem absoluten Werthe nach überein mit

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} .$$

Subtrahirt man die erste Zeile von jeder folgenden, so erhält man

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 - x_0, & y_1 - y_0, & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0, & y_2 - y_0, & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0, & y_3 - y_0, & z_3 - z_0 \end{vmatrix} .$$

Lässt man hier $\Delta_1 x$, $\Delta_2 x$, $\Delta_3 x$, $\Delta_1 y, \ldots \Delta_3 z$ an die Stelle der Coordinatendifferenzen treten, so erhält man für das Parallelepiped aus den Kanten PP_1, PP_2, PP_3

$$\Delta v = \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial \mu} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \mu} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \end{vmatrix} \cdot \Delta\mu \Delta\lambda \Delta\rho .$$

Ersetzt man schliesslich in f die rechtwinkeligen Coordinaten durch ρ, λ, μ, so hat man die Transformation

$$\iiint f \, dx \, dy \, dz = \pm \iiint f \cdot J \cdot d\rho \, d\lambda \, d\mu ,$$

wobei

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial \mu} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \mu} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \end{vmatrix} .$$

Die Grenzen sind hierbei wieder dem Volumen v entsprechend zu bestimmen und das Vorzeichen so zu wählen, dass es mit dem von J übereinstimmt.

6. Man kann die Transformation auch unabhängig von geometrischen Betrachtungen durchführen. Aus den Gleichungen

$$x = \varphi(\rho, \lambda, \mu), \quad y = \psi(\rho, \lambda, \mu)$$

berechne man ρ und λ und substituire diese Werthe in

$$z = \chi(\rho, \lambda, \mu);$$

dadurch erhält man z als Function von x, y und μ. Nimmt man nun x, y und μ als neue Variable für die Integration, so hat man dz durch μ auszudrücken. Bei der ersten Integration bleiben y und x unverändert; unter dieser Voraussetzung gewinnt man durch Differentiation der Substitutionsgleichungen

$$0 = \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \mu} d\mu ,$$

$$0 = \frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial y}{\partial \mu} d\mu ,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial z}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial z}{\partial \mu} d\mu .$$

Hieraus folgt

$$dz = \frac{J}{J_1} d\mu ,$$

wobei

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{vmatrix} .$$

Daher hat man zunächst

$$\iiint f \, dx \, dy \, dz = \iiint f \frac{J}{J_1} \, dx \, dy \, d\mu ,$$

wobei man die Grenzen der Integration nach μ nach den Grenzen für z zu bestimmen hat.

Hierauf ändert man die Ordnung der Integrationen; nachdem ersten beiden die Grenzen entsprechend bestimmt worden sind, erhält man

$$\iiint f \cdot \frac{J}{J_1} \cdot dx \, d\mu \, dy .$$

Nun eliminire man aus den beiden ersten Substitutionsgleichungen ρ und drücke y als Function von λ, μ und x aus. Führt man durch diese Gleichung λ statt y in das Integral ein, so hat man dy durch $d\lambda$ zu ersetzen; dabei ist aber zu berücksichtigen, dass μ und x unverändert bleiben.

Unter dieser Voraussetzung erhält man

$$0 = \frac{\partial x}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial x}{\partial \lambda}\, d\lambda,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\, d\lambda,$$

und hat demnach

$$dy = \frac{J_1}{\dfrac{\partial x}{\partial \rho}}\, d\lambda,$$

und daher die zweite Umformung

2. $$\iiint f\, dx\, dy\, dz = \iiint f \cdot \frac{J}{\dfrac{\partial x}{\partial \rho}}\, dx\, d\mu\, d\lambda,$$

wobei die Grenzen für λ denen für y entsprechen müssen.

Hier ändert man nochmals die Ordnung der Integrationen und beginnt mit der nach x, bildet also, indem man die neuen Grenzen gehörig bestimmt,

$$\iiint f \frac{J}{\dfrac{\partial x}{\partial \rho}}\, d\mu\, d\lambda\, dx.$$

Nun kann man x durch ρ gemäss der ersten Substitutionsgleichung

$$x = \varphi(\rho, \lambda, \mu)$$

ersetzen; da bei der Integration nach x die beiden Variabeln λ und μ ungeändert bleiben, so hat man

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \rho}\, d\rho.$$

Bestimmt man nun die Grenzen der Integration nach ρ entsprechend denen für x, so hat man schliesslich

3. $$\iiint f\, dx\, dy\, dz = \iiint f \cdot J \cdot d\mu\, d\lambda\, d\rho,$$

in Uebereinstimmung mit dem Resultat in 5., da die Ordnung der Integrationen unwesentlich ist.

Die in No. 5 gegebene Vorzeichenregel kommt zu Stande, wenn wir, wie in No. 5, die Bedingung stellen, dass die unteren Grenzen der transformirten Integrale, wie im ursprünglichen, kleiner als die oberen sind. Aus den bei der Transformation verwendeten Formeln

$$dz = \frac{J}{J_1}\, d\mu, \quad dy = \frac{J_1}{\dfrac{\partial x}{\partial \rho}} \cdot d\lambda, \quad dx = \frac{\partial x}{\partial \rho}\, d\rho$$

erkennt man leicht, dass zu positiven $d\mu$, $d\lambda$, $d\rho$ drei positive oder ein positiver und zwei negative Werthe dz, dy, dx gehören, sobald $J > 0$; hingegen zwei positive und ein negativer oder drei negative, sobald $J < 0$. Ist nun z. B. dz negativ, so folgt, dass wachsenden z abnehmende μ entsprechen, dass also die auf μ bezügliche obere Grenze in 1. kleiner ist, als die untere, wenn im gegebenen Integrale alle untern kleiner sind als die obern. Will man daher in 1. die untere Grenze für μ kleiner haben als die obere, so muss man die Grenzen und damit das Vorzeichen des Integrals wechseln.

Hieraus folgt, dass wenn in 3. schliesslich alle untern Grenzen kleiner als die obern sein sollen, das Integral 3. noch mit ± 1 zu multipliciren ist, je nachdem $J \gtrless 0$.

7. Das Quadrat der Functionaldeterminante J ist

$$J^2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & b_0 & b_1 \\ a_2 & b_1 & c_0 \end{vmatrix},$$

wobei abkürzend gesetzt ist

$$a_0 = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2, \quad a_1 = \frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial z}{\partial \rho}\frac{\partial z}{\partial \lambda},$$

$$b_0 = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2, \quad a_2 = \frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \rho}\frac{\partial z}{\partial \mu},$$

$$c_0 = \left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2, \quad b_1 = \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial z}{\partial \mu}.$$

Für die verschwindend kleinen Verschiebungen PP_1, PP_2, PP_3 (No. 5) ist nun

$$PP_1 = \sqrt{a_0}\, d\rho, \quad PP_2 = \sqrt{b_0}\, d\lambda, \quad PP_3 = \sqrt{c_0}\, d\mu.$$

$$PP_1 \cdot PP_2 \cdot \cos P_1 PP_2 = a_1\, d\rho\, d\lambda,$$

$$PP_1 \cdot PP_3 \cdot \cos P_1 PP_3 = a_2\, d\rho\, d\mu,$$

$$PP_2 \cdot PP_3 \cdot \cos P_2 PP_3 = b_1\, d\lambda\, d\mu.$$

Wenn sich je drei Parameterflächen P, Λ, M orthogonal schneiden, so sind $P_1 PP_2$, $P_1 PP_3$, $P_2 PP_3$ rechte Winkel; man hat daher $a_1 = a_2 = b_1 = 0$. Die Determinante J^2 reducirt sich alsdann auf ihr Diagonalglied, es ist

$$J = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2}.$$

Dieser Fall tritt bei den gewöhnlichen räumlichen Polarcoordinaten (No. 4) ein.

8. Ein weiteres Beispiel für orthogonale Parameterflächen geben die elliptischen Raumcoordinaten.

Sind x, y, z die Coordinaten eines Punktes, und ist $a > b > c > 0$, so hat die cubische Gleichung der Unbekannten ν

1. $$\frac{x^2}{a+\nu} + \frac{y^2}{b+\nu} + \frac{z^2}{c+\nu} - 1 = 0$$

immer drei reale Wurzeln. Beseitigt man nämlich die Nenner, so erhält man

2. $$F(\nu) = x^2(b+\nu)(c+\nu) + y^2(a+\nu)(c+\nu) + z^2(a+\nu)(b+\nu) - (a+\nu)(b+\nu)(c+\nu) = 0.$$

Setzt man für ν der Reihe nach die Werthe $-a$, $-b$, $-c$, ∞, so erhält man

$$F(-a) = x^2(b-a)(c-a), \quad F(-b) = y^2(a-b)(c-b),$$

$$F(-c) = z^2(a-c)(b-c), \quad F(\infty) = \infty.$$

Die Wurzeln der Gleichung 1. liegen daher zwischen den Grenzen ∞ und $-c$, $-c$ und $-b$, $-b$ und $-a$; wir bezeichnen sie der Reihe nach mit ρ, λ, μ. Die Gleichungen der Parameterflächen sind

3. $$\mathrm{P} \equiv \frac{x^2}{a+\rho} + \frac{y^2}{b+\rho} + \frac{z^2}{c+\rho} - 1 = 0,$$

$$\mathrm{M} \equiv \frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} - 1 = 0,$$

$$\Lambda \equiv \frac{x^2}{a+\mu} + \frac{y^2}{b+\mu} + \frac{z^2}{c+\mu} - 1 = 0.$$

Die Flächen P sind dreiachsige Ellipsoide, Λ sind einschalige und M sind zweischalige Hyperboloide. Da ρ, λ, μ die Wurzeln der Gleichung 2. sind, so gilt die Identität

$$(a+\nu)(b+\nu)(c+\nu) - x^2(b+\nu)(c+\nu) - y^2(a+\nu)(b+\nu) - z^2(a+\nu)(b+\nu) \equiv (\nu-\rho)(\nu-\lambda)(\nu-\mu).$$

Ersetzt man hier ν der Reihe nach durch $-a$, $-b$, $-c$, so erhält man die Substitutionsgleichungen

$$4.\quad x^2 = \frac{(a+\rho)(a+\lambda)(a+\mu)}{(b-a(c-a)}, \quad y^2 = \frac{(b+\rho)(b+\lambda)(b+\mu)}{(a-b)(c-b)}, \quad z^2 = \frac{(c+\rho)(c+\lambda)(c+\mu)}{(a-c)(b-c)}.$$

Durch Subtraction je zweier der Gleichungen 3. erhält man die Gleichungen

$$5.\quad \begin{aligned} \frac{x^2}{(a+\rho)(a+\lambda)} + \frac{y^2}{(b+\rho)(b+\lambda)} + \frac{z^2}{(c+\rho)(c+\lambda)} &= 0, \\ \frac{x^2}{(a+\rho)(a+\mu)} + \frac{y^2}{(b+\rho)(b+\mu)} + \frac{z^2}{(c+\rho)(c+\mu)} &= 0, \\ \frac{x^2}{(a+\lambda)(a+\mu)} + \frac{y^2}{(b+\lambda)(b+\mu)} + \frac{z^2}{(c+\lambda)(c+\mu)} &= 0. \end{aligned}$$

Bezeichnet man mit $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \mu_0, \mu_1, \mu_2$ die Cosinus der Stellungswinkel der Tangentenebenen der Flächen P, Λ, M im Punkte P, so ist bekanntlich

$$6.\quad \begin{aligned} \rho_0 : \rho_1 : \rho_2 &= \frac{x}{a+\rho} : \frac{y}{b+\rho} : \frac{z}{c+\rho}, \\ \lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2 &= \frac{x}{a+\lambda} : \frac{y}{b+\lambda} : \frac{z}{c+\lambda}, \\ \mu_0 : \mu_1 : \mu_2 &= \frac{x}{a+\mu} : \frac{y}{b+\mu} : \frac{z}{c+\mu}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen 5. sagen daher aus, dass diese Tangentenebenen normal zu einander sind, dass sich also die durch P gehenden Parameterflächen P, Λ, M normal schneiden.

Aus den Gleichungen 4. ergiebt sich

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial x}{\partial \rho} &= \frac{x}{a+\rho}, & 2\frac{\partial y}{\partial \rho} &= \frac{y}{b+\rho}, & 2\frac{\partial z}{\partial \rho} &= \frac{z}{c+\rho}; \\ 2\frac{\partial x}{\partial \lambda} &= \frac{x}{a+\lambda}, & 2\frac{\partial y}{\partial \lambda} &= \frac{y}{b+\lambda}, & 2\frac{\partial z}{\partial \lambda} &= \frac{z}{c+\lambda}; \\ 2\frac{\partial x}{\partial \mu} &= \frac{x}{a+\mu}, & 2\frac{\partial y}{\partial \mu} &= \frac{y}{b+\mu}, & 2\frac{\partial z}{\partial \mu} &= \frac{z}{c+\mu}; \end{aligned}$$

hieraus folgt weiter

$$7.\quad \begin{aligned} J = \frac{1}{8}&\sqrt{\frac{x^2}{(a+\rho)^2} + \frac{y^2}{(b+\rho)^2} + \frac{z^2}{(c+\rho)^2}} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{(a+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c+\lambda)^2}} \\ &\cdot \sqrt{\frac{x^2}{(a+\mu)^2} + \frac{y^2}{(b+\mu)^2} + \frac{z^2}{(c+\mu)^2}}. \end{aligned}$$

Die Radicanden, die wir der Reihe nach mit $1 : R^2$, $1 : L^2$, $1 : M^2$, bezeichnen wollen, kann man in folgender Weise bestimmen. Für die in 6. enthaltenen Cosinus hat man die Werthe

$$8.\quad \begin{aligned} \rho_0 &= \frac{Rx}{a+\rho}, & \rho_1 &= \frac{Ry}{b+\rho}, & \rho_2 &= \frac{Rz}{c+\rho}, \\ \lambda_0 &= \frac{Lx}{a+\lambda}, & \lambda_1 &= \frac{Ly}{b+\lambda}, & \lambda_2 &= \frac{Lz}{c+\lambda}, \\ \mu_0 &= \frac{Mx}{a+\mu}, & \mu_1 &= \frac{My}{b+\mu}, & \mu_2 &= \frac{Mz}{c+\mu}. \end{aligned}$$

Aus diesen Werthen und mit Rücksicht auf die Gleichungen 3. ergiebt sich

$$9.\quad \begin{aligned} \rho_0 x + \rho_1 y + \rho_2 z &= R, \\ \lambda_0 x + \lambda_1 y + \lambda_2 z &= L, \\ \mu_0 x + \mu_1 y + \mu_2 z &= M. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lehren (vergl. Analyt. Geom. des Raumes, § 2, No. 4), dass R, L, M die Coordinaten von P in einem Systeme sind, dessen Ebenen durch O parallel zu den Tangentenebenen der Parameterflächen P, Λ, M, gelegt sind.

Bildet man in bekannter Weise die Formeln, welche x, y, z in den neuen Coordinaten R, L, M ausdrücken, so erhält man

$$10.\quad \begin{aligned} x &= \rho_0 R + \lambda_0 L + \mu_0 M, \\ y &= \rho_1 R + \lambda_1 L + \mu_1 M, \\ z &= \rho_2 R + \lambda_2 L + \mu_2 M. \end{aligned}$$

Hierin ersetzen wir nun die $\rho_0 \ldots \mu_2$ durch die Werthe 8.; dadurch entsteht

$$11.\quad \begin{aligned} \frac{R^2}{a+\rho} + \frac{L^2}{a+\lambda} + \frac{M^2}{a+\mu} &= 1, \\ \frac{R^2}{b+\rho} + \frac{L^2}{b+\lambda} + \frac{M^2}{b+\mu} &= 1, \\ \frac{R^2}{c+\rho} + \frac{L^2}{c+\lambda} + \frac{M^2}{c+\mu} &= 1. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lehren, dass die cubische Gleichung

$$\frac{R^2}{u+\rho} + \frac{L^2}{u+\lambda} + \frac{M^2}{u+\mu} = 1$$

die Wurzeln a, b, c hat. Beseitigt man in dieser Gleichung die Nenner und wechselt die Zeichen, so erhält man

$$(u+\rho)(u+\lambda)(u+\mu) - R^2(u+\lambda)(u+\mu) - L^2(u+\rho)(u+\mu) - M^2(u+\rho)(u+\lambda) = 0.$$

Man hat daher die Identität

$$\begin{aligned} &(u+\rho)(u+\lambda)(u+\mu) - R^2(u+\lambda)(u+\mu) - L^2(u+\rho)(u+\mu) \\ &- M^2(u+\rho)(u+\lambda) \equiv (u-a)(u-b)(u-c). \end{aligned}$$

Setzen wir in diese identische Gleichung für u der Reihe nach $-\rho$, $-\lambda$, $-\mu$, so erhalten wir sofort

$$12.\quad \begin{aligned} R^2 &= \frac{(\rho+a)(\rho+b)(\rho+c)}{(\lambda-\rho)(\mu-\rho)}, \quad L^2 = \frac{(\lambda+a)(\lambda+b)(\lambda+c)}{(\rho-\lambda)(\mu-\lambda)}, \\ M^2 &= \frac{(\mu+a)(\mu+b)(\mu+c)}{(\rho-\mu)(\lambda-\mu)}. \end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser Werthe ergiebt sich schliesslich die gesuchte Transformation

$$\iiint f\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{8}\iiint f \cdot \frac{(\rho-\lambda)(\lambda-\mu)(\mu-\rho)}{\sqrt{-ABC}}\,d\rho\,d\lambda\,d\mu$$

wobei zur Abkürzung gesetzt worden ist

$$A \equiv (\rho+a)(\rho+b)(\rho+c), \quad B \equiv (\lambda+a)(\lambda+b)(\lambda+c), \quad C \equiv (\mu+a)(\mu+b)(\mu+c).$$

Wir wollen diese Formel anwenden, um einen Octanten des Ellipsoids zu berechnen, dessen Oberfläche die Gleichung hat

$$E \equiv \frac{x^2}{a+\rho_0} + \frac{y^2}{b+\rho_0} + \frac{z^2}{c+\rho_0} - 1 = 0.$$

Das Doppelintegral nach μ und λ hat sich hierbei über alle Punkte des Octanten eines mit E confocalen Ellipsoids zu erstrecken, mithin über alle Werthe von μ und λ; daher sind für μ die Grenzen $-a$ und $-b$, und für λ sind sie $-b$ und $-c$. Betreffs der Grenzen für ρ genügen die Bemerkungen, dass die Achsen der Parameterfläche mit ρ wachsen, und dass E selbst eine der Parameterflächen P ist, nämlich für den besonderen Werth $\rho = \rho_0$; die Flächen P, die innerhalb E liegen, gehören daher zu den Werthen $\rho = -c$ bis $\rho = \rho_0$.

Da es sich nur um eine Addition der Volumenelemente handelt, so ist $f = 1$. Verwendet man ferner die bekannte Formel für den Inhalt eines dreiachsigen Ellipsoids, so erhält man schliesslich die bemerkenswerthe Integralformel

$$\frac{4}{3}\pi\sqrt{a+\rho_0}\,\sqrt{b+\rho_0}\,\sqrt{c+\rho_0} = \int\limits_{-c}^{\rho_0}\int\limits_{-b}^{-c}\int\limits_{-b}^{-a}\frac{(\rho-\lambda)(\lambda-\mu)(\mu-\rho)}{\sqrt{-ABC}}\,d\rho\,d\lambda\,d\mu\,.$$

§ 11. Die periodischen Reihen und die FOURIER'schen Integrale.

1. Die unendlichen Reihen, die wir in der Differentialrechnung kennen gelernt haben, waren Potenzreihen, d. i. Reihen, welche nach den steigenden Potenzen der Variabeln fortschreiten. In diesem Abschnitte werden wir eine andere Gattung unendlicher Reihen untersuchen, nämlich Reihen, welche eine der beiden allgemeinen Formen haben

1. $$A_0 + A_1\cos u + A_2\cos 2u + A_3\cos 3u + \ldots\ldots$$
2. $$B_1\sin u + B_2\sin 2u + B_3\sin 3u + \ldots$$

welche also nach dem Cosinus und Sinus der ganzzahligen Vielfachen des Bogens u fortschreiten.

Wenn die Reihen innerhalb der Grenzen 0 und π convergiren*), so stellen sie Functionen von u dar; setzt man in diesem Falle

$$A_0 + A_1\cos u + A_2\cos 2u + \ldots = f(u),$$

so ist offenbar

$$f(\pi + v) = f(\pi - v)\,.$$

Die Werthe, welche die Function von $u = 0$ bis $u = \pi$ annimmt, wiederholen sich also in umgekehrter Reihenfolge, wenn die Variabele von $u = \pi$ bis $u = 2\pi$ wächst. Beachtet man ferner, dass die Faktoren $\cos mu$ ihre Werthe nicht ändern, wenn u um ein ganzes Vielfaches von 2π zu oder abnimmt, so erkennt man, dass

$$f(u + 2k\pi) = f(u)\,.$$

Die Summe der Reihe ist daher eine periodische Function von u. Ebenso erkennt man sofort, dass auch die Reihe 2. eine periodische Function von u ist. Beide Reihen werden daher als periodische Reihen bezeichnet.

Hierin unterscheiden sich diese Reihen wesentlich von den Potenzreihen.

Potenzreihen sind innerhalb des Convergenzgebiets Functionen der Variabeln; an der Grenze der Convergenz treten im Allgemeinen Discontinuitäten auf; und für alle Werthe der Variabeln, die ausserhalb des Convergenzgebietes liegen, ist die Summe der Reihe unendlich gross. Die periodischen Reihen 1. und 2. dagegen sind für alle Werthe von u convergent, wenn sie für das Intervall 0 bis π convergiren, und sind periodische Functionen von u mit der Periode 2π.

2. Ist $f(u)$ eine Function, die innerhalb des Intervalls 0 und π endlich bleibt, so kann man die Coefficienten $A_0, A_1, A_2 \ldots A_{n-1}$, bez. $B_1, B_2, B_3, \ldots B_n$ so bestimmen, dass die Gleichungen

1. $$f(u) = A_0 + A_1\cos u + A_2\cos 2u + A_{n-1}\cos(n-1)u$$
2. $$f(u) = B_1\sin u + B_2\sin 2u + B_3\sin 3u + \ldots + B_n\sin nu$$

für n verschiedene innerhalb des Intervalls 0 und π liegende übrigens willkürlich gewählte Werthe von u erfüllt werden. Denn setzt man die gegebenen Werthe von u z. B. in 1. ein, so erhält man n Gleichungen, welche die n unbekannten Coefficienten $A_0, A_1 \ldots A_{n-1}$ linear enthalten, aus denen die A also eindeutig bestimmt werden können.

Die Summen der endlichen Reihen

*) Ueber die Convergenzbedingungen vergl. u. A. SCHLOEMILCH, Compendium der höhern Analysis, 4. Aufl., Bd. I. pag. 40.

$$S_n = A_0 + A_1\cos u + A_2\cos 2u + \ldots + A_{n-1}\cos(n-1)u$$
$$\Sigma_n = B_1\sin u + B_2\sin 2u + \ldots + B_n\sin nu$$

stimmen also dann für die gegebenen n Werthe der Variabeln u mit der Function $f(u)$ überein.

Vermehrt man nun die Zahl n, so wächst die Anzahl der Pnnkte, welche die Curven S_n, Σ_n und $f(u)$ — u dabei als Abscisse und S_n, Σ_n bez. $f(u)$ als Ordinate betrachtet — gemein haben; wird n unendlich gross, so haben die Curven S_n und $f(u)$, bez. Σ_n und $f(u)$ unendlich viele Punkte innerhalb des Abscissenintervalls 0 und π gemein. Es wird daher jedenfalls möglich sein, die Coefficienten $A_0, A_1, A_2 \ldots$ bez. $B_1, B_2, B_3 \ldots$ der unendlichen Reihen

$$A_0 + A_1\cos u + A_2\cos 2u + \ldots$$
$$B_1\sin u + B_2\sin 2u + \ldots$$

so zu bestimmen, dass für alle Werthe von u innerhalb 0 und π die Reihen eine gegebene, innerhalb der Grenzen endlich bleibende Function $f(u)$ darstellen.

3. Angenommen, es gelte die Entwicklung

1. $$f(u) = A_0 + A_1\cos u + A_2\cos 2u + \ldots\ldots$$

so kann man die Coefficienten leicht auf folgendem Wege bestimmen.

Man multiplicire 1. mit du und integrire zwischen den Grenzen 0 und π. Da für jede ganze Zahl k

$$\int_0^\pi \cos ku\,du = 0\,,$$

so erhält man

$$\int_0^\pi f(u)\,du = \pi A_0\,,$$

mithin

2. $$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(u)\,du\,.$$

Zur Bestimmung der andern Coefficienten machen wir von der Integralformel Gebrauch

$$\int_0^\pi \cos ku\cos nu\,du = \tfrac{1}{2}\left(\int_0^\pi \cos(k-n)u\,du + \int_0^\pi \cos(k+n)u\,du\right)$$
$$= \begin{cases} \tfrac{1}{2}\pi, & \text{wenn } k = n \\ 0, & \ k \gtrless n\,. \end{cases}$$

Multiplicirt man 1. mit $\cos ku\,du$ und integrirt zwischen den Grenzen 0 und π, so erhält man hiernach

$$\int_0^\pi f(u)\cos ku\,du = \tfrac{1}{2}\pi A_k\,,$$

mithin

3. $$A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(u)\cos ku\,du\,.$$

Durch ein ähnliches Verfahren erhält man die Coefficienten der Reihe

4. $$f(u) = B_1\sin u + B_2\sin 2u + B_3\sin 3u + \ldots$$

Multiplicirt man beide Seiten mit $\sin ku\,du$ und integrirt zwischen den Grenzen 0 und π, indem man dabei von der Formel Gebrauch macht

$$\int_0^\pi sin ku \, sin nu \, du = \tfrac{1}{2}\left(\int_0^\pi cos(k-n)u\,du - \int_0^\pi cos(k+n)u\,du\right)$$
$$= \begin{cases} \tfrac{1}{2}\pi, & \text{wenn } k = n, \\ 0, & \text{„} \quad k \gtrless n, \end{cases}$$

so erhält man

$$\int_0^\pi f(u)\, sin ku \, du = \tfrac{1}{2}\pi B_k,$$

und daher

5. $$B_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(u)\, sin ku \, du.$$

4. Hierbei ist vorausgesetzt worden, dass die Entwicklungen

1. $f(u) = A_0 + A_1 cos u + A_2 cos 2u + A_3 cos 3u + \ldots$
2. $f(u) = B_1 sin u + B_2 sin 2u + B_3 sin 3u + \ldots$

zulässig sind, und unter dieser Voraussetzung sind die Coefficienten bestimmt worden. Es ist nun noch zu untersuchen, welche Beschaffenheit eine Function $f(u)$ haben muss, um innerhalb des Intervalls 0 und π in eine periodische Reihe 1. oder 2. entwickelbar zu sein.

Um diese Frage zu entscheiden, summiren wir die endlichen Reihen, die aus 1. und 2. hervorgehen, wenn man die gefundenen Coefficienten einsetzt und bei dem Gliede mit dem Index n abbricht,

3. $$S_n = \frac{2}{\pi}\Big[\frac{1}{2}\int_0^\pi f(v)dv + \int_0^\pi f(v) cos v\, cos u\, dv + \int_0^\pi f(v) cos 2v\, cos 2u\, dv + \int_0^\pi f(v) cos 3v\, cos 3u\, dv + \ldots + \int_0^\pi f(v) cos nv\, cos nu\, dv\Big];$$

4. $$\Sigma_n = \frac{2}{\pi}\Big[\int_0^\pi f(v) sin v\, sin u\, dv + \int_0^\pi f(v) sin 2v\, sin 2u\, dv + \int_0^\pi f(v) sin 3v\, sin 3u\, dv + \ldots + \int_0^\pi f(v) sin nv\, sin nu\, du\Big].$$

Vereint man alle Integrale in jeder Summe zu einem einzigen, so erhält man

5. $$S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(v)\,(1 + 2 cos v\, cos u + 2 cos 2v\, cos 2u + \ldots + 2 cos nv\, cos nu)\,dv,$$

6. $$\Sigma_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(v)(2 sin v\, sin u + 2 sin 2v\, sin 2u + 2 sin 3v\, sin 3u + \ldots + 2 sin nv\, sin nu)\,dv.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$R_1 = cos(v-u) + cos 2(v-u) + cos 3(v-u) + \ldots + cos n(v-u),$$
$$R_2 = cos(v+u) + cos 2(v+u) + cos 3(v+u) + \ldots + cos n(v+u),$$

so erhält man

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(v)(1 + R_1 + R_2)dv, \quad \Sigma_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(v)(R_1 - R_2)\,dv.$$

Die goniometrischen Reihen R_1 und R_2 lassen sich leicht summiren. Multiplicirt man nämlich die Reihe

$$cos a + cos 2a + cos 3a + cos 4a + \ldots + cos na$$

mit $2 sin \frac{1}{2} a$, und macht in jedem Gliede von der Formel Gebrauch

$$2 sin \tfrac{1}{2} a \cdot cos ka = sin(k + \tfrac{1}{2}a) - sin(k - \tfrac{1}{2}a),$$

so erhält man sofort

$$2 sin \tfrac{1}{2} a (cos a + cos 2a + \ldots + cos na)$$
$$= sin \tfrac{3}{2} a - sin \tfrac{1}{2} a + sin \tfrac{5}{2} a - sin \tfrac{3}{2} a + \ldots + sin(n + \tfrac{1}{2})a - sin(n - \tfrac{1}{2})a.$$

Hieraus folgt

$$cos a + cos 2a + \ldots + cos na = -\tfrac{1}{2} + \frac{sin(n + \frac{1}{2})a}{2 sin \frac{1}{2} a}.$$

Daher ist

$$R_1 = -\tfrac{1}{2} + \frac{sin \frac{2n+1}{2}(v-u)}{2 sin \frac{1}{2}(v-u)}, \quad R_2 = -\tfrac{1}{2} + \frac{sin \frac{2n+1}{2}(v+u)}{2 sin \frac{1}{2}(v+u)},$$

und schliesslich

7. $$S_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(v)\cdot\frac{sin \frac{2n+1}{2}(v-u)}{sin \frac{1}{2}(v-u)}dv + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(v)\cdot\frac{sin \frac{2n+1}{2}(v+u)}{sin \frac{1}{2}(v+u)}dv,$$

8. $$\Sigma_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(v)\cdot\frac{sin \frac{2n+1}{2}(v-u)}{sin \frac{1}{2}(v-u)}dv - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(v)\cdot\frac{sin \frac{2n+1}{2}(v+u)}{sin \frac{1}{2}(v+u)}dv.$$

In diesen Gleichungen lassen wir nun n unendlich wachsen. Ob dabei S_n und Σ_n sich bestimmten endlichen Grenzen nähern und welches diese Grenzen gegebenenfalls sind, das hängt davon ab, was aus den beiden Integralen

$$\int_0^\pi f(v)\,\frac{sin \frac{2n+1}{2}(v-u)}{sin \frac{1}{2}(v-u)}dv \quad \text{und} \quad \int_0^\pi f(v)\,\frac{sin \frac{2n+1}{2}(v+u)}{sin \frac{1}{2}(v+u)}dv$$

wird, wenn n unendlich wächst.

Statt mit diesen beiden Integralen, werden wir uns zunächst mit dem Grenzwerthe eines etwas einfacheren beschäftigen.

5. **Grenzwerth des Integrales** $\int_0^\alpha \frac{sin mu}{u} F(u)\,du$, wenn m die Reihe der positiven ganzen Zahlen durchlaufend unendlich wächst, und α positiv ist.

Wir theilen den Betrag $m\alpha$ in q ganze Vielfache von π und einen Rest ρ, der kleiner als π ist, so dass also

$$m\alpha = q\pi + \rho, \quad \alpha = \frac{q\pi + \rho}{m},$$

und zerlegen das gegebene Integral in

$$\int_0^{\frac{\pi}{m}} \frac{sin mu}{u} F(u)\,du + \int_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{2\pi}{m}} \frac{sin mu}{u} F(u)\,du + \int_{\frac{2\pi}{m}}^{\frac{3\pi}{m}} \frac{sin mu}{u} F(u)\,du + \ldots$$
$$\ldots + \int_{\frac{(q-1)\pi}{m}}^{\frac{q\pi}{m}} \frac{sin mu}{u} F(u)\,du + \int_{\frac{q\pi}{m}}^{\frac{q\pi}{m}+\frac{\rho}{m}} \frac{sin mu}{u} F(u)\,du.$$

Jedes dieser Integrale transformiren wir durch eine geeignete Substitution; in dem zwischen den Grenzen

$$\frac{k\pi}{m} \quad \text{und} \quad \frac{(k+1)\pi}{m}$$

genommenen Integrale setzen wir

$$u = v + \frac{k\pi}{m},$$

und in dem letzten Integrale

$$u = v + \frac{q\pi}{m}.$$

Hierdurch erhalten alle transformirten Integrale, bis auf das letzte, die gemeinsamen Grenzen 0 und $\frac{\pi}{m}$; sie lassen sich daher in ein Integral vereinen, und es entsteht

1.
$$\int_0^\alpha \frac{\sin mu}{u} F(u)\,du = \int_0^{\frac{\pi}{m}} \left\{ \frac{F(v)}{v} - \frac{F\left(v+\frac{\pi}{m}\right)}{v+\frac{\pi}{m}} + \frac{F\left(v+\frac{2\pi}{m}\right)}{v+\frac{2\pi}{m}} - \cdot\cdot \right.$$
$$\left. \dots \pm \frac{F\left(v+\frac{(q-1)\pi}{m}\right)}{v+\frac{(q-1)\pi}{m}} \right\} \sin mv\,dv \pm \int_0^{\frac{\rho}{m}} \frac{F\left(v+\frac{q\pi}{m}\right)}{v+\frac{q\pi}{m}} \sin mv\,dv.$$

Ersetzt man hier mv durch ω, so erhält man

2.
$$\int_0^\alpha \frac{\sin mu}{u} F(u)\,du = \int_0^{\pi} \left[\frac{F\left(\frac{\omega}{m}\right)}{\omega} - \frac{F\left(\frac{\omega+\pi}{m}\right)}{\omega+\pi} + \frac{F\left(\frac{\omega+2\pi}{m}\right)}{\omega+2\pi} - \cdot\cdot \right.$$
$$\left. \dots \pm \frac{F\left(\frac{\omega+(q-1)\pi}{m}\right)}{\omega+(q-1)\pi} \right] \sin\omega\,d\omega \pm \int_0^{\rho} \frac{F\left(\frac{\omega+q\pi}{m}\right)}{\omega+q\pi} \sin\omega\,d\omega.$$

Wir nehmen nun zunächst für $F(u)$ den einfachsten Fall an und setzen $F(u) = 1$; dann entsteht aus 2., indem wir sogleich zur Grenze für $m = \infty$ übergehen

$$lim \int_0^\alpha \frac{\sin mu}{u} du = lim \int_0^\pi \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega+\pi} + \frac{1}{\omega+2\pi} - \frac{1}{\omega+3\pi} + \dots \right) \sin\omega\,d\omega$$
$$\pm\, lim \int_0^\rho \frac{1}{\omega+q\pi} \sin\omega\,d\omega.$$

Da $\rho < \pi$, so ist die unter dem letzten Integralzeichen stehende Function innerhalb des ganzen Intervalls positiv, und daher das Integral kleiner als

$$\int_0^\rho \frac{1}{\omega+q\pi} d\omega = l\left(1 + \frac{\rho}{q\pi}\right).$$

Wird m unendlich gross, so wird auch $q = \infty$; da nun

$$lim\, l\left(1+\frac{\rho}{q\pi}\right) = 0, \quad q = \infty,$$

so folgt, dass um so mehr

$$lim \int_0^\rho \frac{1}{\omega+q\pi} \sin\omega\,d\omega = 0, \quad q = \infty.$$

Der Grenzwerth der Function unter dem ersten Integralzeichen rechts

$$\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega+\pi} + \frac{1}{\omega+2\pi} - \frac{1}{\omega+3\pi} + \frac{1}{\omega+4\pi} - \dots \right) \sin\omega\,d\omega$$

ist für alle innerhalb der Integrationsgrenzen 0 und π liegenden Werthe von ω endlich. Denn für $\omega = 0$ ist zwar das erste Glied der eingeklammerten Summe unendlich gross, das Produkt mit dem verschwindenden $\sin\omega$ ist aber $= 1$; alle andern Bestandtheile des Produkts verschwinden mit $\sin\omega$. Für jeden positiven Werth von ω enthält die Reihe

$$\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega+\pi} + \frac{1}{\omega+2\pi} - \frac{1}{\omega+3\pi} + \dots$$

Glieder, welche unbegrenzt abnehmen; daher hat die Reihe einen endlichen Grenzwerth.

Hieraus folgt, dass der Grenzwerth des Integrales

$$\int_0^\pi \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega+\pi} + \frac{1}{\omega+2\pi} - \cdot\cdot \right) \sin\omega\,d\omega$$

eine endliche bestimmte Grösse ist; wird dieselbe mit C bezeichnet, so haben wir schliesslich

$$lim \int_0^\alpha \frac{\sin mu}{u} du = C.$$

Wir werden sehr bald Gelegenheit finden C zu bestimmen.

6. Wir wenden uns nun zur Gleichung 2. der vorigen Nummer zurück und setzen voraus, dass $F(u)$ innerhalb der Integrationsgrenzen 0 und α endlich bleibt.

Unter dieser Voraussetzung ist in dem Grenzwerthe

$$lim \int_0^\rho \frac{F\left(\frac{\omega+q\pi}{m}\right)}{\omega+q\pi} \sin\omega\,d\omega$$

der Zähler des hinter dem Integralzeichen stehenden Bruches endlich, während der Nenner unendlich gross ist; da nun auch ρ eine endliche Grösse, nämlich $< \pi$ ist, so folgt

$$lim \int_0^\rho \frac{F\left(\frac{\omega+q\pi}{m}\right)}{\omega+q\pi} \sin\omega\,d\omega = 0.$$

Daher verbleibt

$$lim \int_0^\alpha \frac{\sin mu}{u} F(u)\,du = lim \int_0^\pi \left[\frac{F\left(\frac{\omega}{m}\right)}{\omega} - \frac{F\left(\frac{\omega+\pi}{m}\right)}{\omega+\pi} + \frac{F\left(\frac{\omega+2\pi}{m}\right)}{\omega+2\pi} - \cdot\cdot \right] \sin\omega\,d\omega.$$

Die Summe S der eingeklammerten Reihe wollen wir zunächst unter der Voraussetzung bilden, dass $F(\omega)$ innerhalb des Intervalles 0 und α endlich und positiv ist und ununterbrochen abnimmt. Alsdann enthält die Reihe Glieder, die zur Grenze Null abnehmen, und ist daher convergent. Die Summe der Reihe liegt zwischen den Summen der ersten $2k$ und der ersten $2k+1$ Glieder, also zwischen

$$S_{2k} = \frac{F\left(\frac{\omega}{m}\right)}{\omega} - \frac{F\left(\frac{\omega+\pi}{m}\right)}{\omega+\pi} + \ldots - \frac{F\left(\frac{\omega+(2k-1)\pi}{m}\right)}{\omega+(2k-1)\pi}$$

und

$$S_{2k+1} = \frac{F\left(\frac{\omega}{m}\right)}{\omega} - \frac{F\left(\frac{\omega+\pi}{m}\right)}{\omega+\pi} + \ldots - \frac{F\left(\frac{\omega+(2k-1)\pi}{m}\right)}{\omega+(2\pi-1)\pi} + \frac{F\left(\frac{\omega+2k\pi}{m}\right)}{\omega+2k\pi}.$$

Wir können nun k unendlich gross voraussetzen, doch so, dass k zu m ein unendlich kleines Verhältniss hat; alsdann ist

$$lim\, S_{2k} = F(0)\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega+\pi} + \frac{1}{\omega+2\pi} - \frac{1}{\omega+3\pi} + \ldots\right),$$

$$lim(S_{2k+1} - S_{2k}) = lim\frac{F\left(\frac{\omega+2k\pi}{m}\right)}{\omega+2k\pi} = 0.$$

Da nun S zwischen S_{2k} und S_{2k+1} enthalten ist, so folgt

$$S = F(0)\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega+\pi} + \frac{1}{\omega+2\pi} - \frac{1}{\omega+3\pi} + \ldots\right).$$

Hieraus ergiebt sich

1. $$lim\int_0^\alpha \frac{sin\, mu}{u} F(u)\, du = C \cdot F(0).$$

Nimmt $F(u)$ von 0 bis α ab, ohne dabei immer positiv zu bleiben, so ist $F(u) - F(\alpha)$ immer positiv, und erfüllt daher die Voraussetzungen, für welche die Gleichung 1. gilt. Folglich ist

$$lim\int_0^\alpha \frac{sin\, mu}{u}[F(u) - F(\alpha)]\, du = C[F(0) - F(\alpha)].$$

Da nun

2. $$lim\int_0^\alpha \frac{sin\, mu}{u} F(\alpha)\, du = C \cdot F(\alpha),$$

so folgt

$$lim\int_0^\alpha \frac{sin\, mu}{u} F(u)\, du = C \cdot F(0),$$

so dass nun diese Gleichung für jede von 0 bis α abnehmende Function gilt.

Nimmt $F(u)$ von 0 bis α ununterbrochen zu, so nimmt $F(\alpha) - F(u)$ ununterbrochen ab; es ist daher

$$lim\int_0^\alpha \frac{sin\, mu}{u}[F(\alpha) - F(u)]\, du = C \cdot [F(\alpha) - F(0)].$$

In Rücksicht auf 2. folgt hieraus

$$lim\int_0^\alpha \frac{sin\, mu}{u} F(u)\, du = C \cdot F(0).$$

Wenn $F(u)$ von $u = 0$ bis $u = \alpha$ abwechselnd steigt und fällt, so kann man immer zwei Curven $F_1(u)$ und $F_2(u)$ angeben, von denen die erste innerhalb desselben Intervalls nur steigt, die zweite nur fällt; für welche $F_1(0) = F_2(0) = F(0)$; und dass ferner für jedes zwischen 0 und α gelegene u

$$F(u) = \tfrac{1}{2}[F_1(u) + F_2(u)].$$

Steigt nämlich die Curve F zwischen $u = \beta$ und $u = \gamma$, so nehme man in diesem Intervalle F_2 beliebig fallend, und bestimme darnach F_1; und wenn F zwischen δ und ε fällt, so nehme man F_1 beliebig steigend und bestimme darnach F_2.

Alsdann ist

$$lim\int_0^\alpha \frac{sin\, mu}{u} F(u)\, du = lim\int_0^\alpha \frac{sin\, mu}{u} \cdot \frac{F_1(u) + F_2(u)}{2}\, du$$

$$= \frac{1}{2}\left[lim\int_0^\alpha \frac{sin\, mu}{u} F_1(u)\, du + lim\int_0^\alpha \frac{sin\, mu}{u} F_2(u)\, du\right]$$

$$= C \cdot F(0).$$

Hiernach gilt 1. für jede Function F, die zwischen $u = 0$ und $u = \alpha$ endlich bleibt. Aus

$$lim\int_0^\alpha \frac{sin\, mu}{u} F(u)\, du = C \cdot F(0) \quad \text{und}$$

$$lim\int_0^\beta \frac{sin\, mu}{u} F(u)\, du = C \cdot F(0)$$

folgt sofort durch Subtraction

3. $$lim\int_\alpha^\beta \frac{sin\, mu}{u} F(u)\, du = 0,$$

wobei α und β zwei beliebige reale Zahlen, auch von verschiedenen Zeichen, sein können, wie man leicht erkennt; wenn nur $F(u)$ innerhalb der Grenzen endlich bleibt.

Um die Constante C zu bestimmen, wird man $F(u)$ so wählen, dass das Integral direkt ausgeführt werden kann. Wir setzen $F(u) = u : sin\, u$ und erhalten

$$\int_0^\alpha \frac{sin\, mu}{sin\, u} F(u)\, du = \int_0^\alpha \frac{sin\, mu}{sin\, u}\, du.$$

Nun ist bekanntlich

$$\frac{sin(2n+1)a}{sin\, a} = 1 + 2(cos 2a + cos 4a + cos 6a + \ldots + cos 2na).$$

Setzen wir m ungerade voraus und nehmen $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so entsteht

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin\, mu}{u}\, du = \frac{\pi}{2}.$$

Da nun in unserem Falle $F(0) = 1$, so folgt

$$C = \frac{\pi}{2}.$$

Daher ist für jede innerhalb der Integrationsgrenzen endlich bleibende Function $F(u)$ und für ein positives α

$$lim\int_0^\alpha \frac{sin\, mu}{u} F(u)\, du = \frac{\pi}{2} F(0).$$

7. Aus dem soeben gewonnenen Grenzwerthe ergiebt sich nun auch der Grenzwerth des Integrales

$$\int_0^\alpha \frac{\sin mu}{\sin u} f(u)\, du$$

durch die Substitution

$$F(u) = \frac{u}{\sin u} f(u).$$

Dieselbe ist zulässig, sobald $f(u)$ innerhalb der Grenzen 0 und α endlich bleibt und α kleiner als π ist. Man erhält

1. $$\lim \int_0^\alpha \frac{\sin mu}{\sin u} f(u)\, du = \frac{\pi}{2} f(0), \quad 0 < \alpha < \pi.$$

Liegen α und β zwischen 0 und π, so ist

$$\lim \int_\alpha^\beta \frac{\sin mu}{\sin u} f(u)\, du = \lim \int_0^\beta \frac{\sin mu}{\sin u} f(u)\, du - \lim \int_0^\alpha \frac{\sin mu}{\sin u} f(u)\, du.$$

Daher folgt

2. $$\lim \int_\alpha^\beta \frac{\sin mu}{\sin u} f(u)\, du = 0.$$

Diese Ergebnisse setzen uns in den Stand, die in No. 4 abgebrochene Untersuchung zu Ende zu führen. Es handelte sich dort um die Grenzwerthe der beiden Integrale

$$J_1 = \int_0^\pi f(v) \frac{\sin \frac{1}{2}(2n+1)(v-u)}{\sin \frac{1}{2}(v-u)} dv \quad \text{und} \quad J_2 = \int_0^\pi f(v) \frac{\sin \frac{1}{2}(2n+1)(v+u)}{\sin (v+u)} dv.$$

Setzt man in dem ersten $v - u = 2w$, in dem zweiten $v + u = 2w$, so erhält man

$$J_1 = 2\int_{-\frac{u}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{u}{2}} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w+u)\, dw, \quad J_2 = 2\int_{\frac{u}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{u}{2}} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w-u)\, dw.$$

Unter der Voraussetzung $0 < u < \pi$ zerlegen wir weiter

$$J_1 = 2\int_{-\frac{u}{2}}^{0} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w+u)\, dw + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{u}{2}} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w+u)\, dw.$$

Für das zweite Integral ergiebt sich nach 1. sofort

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{u}{2}} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w+u)\, dw = \frac{\pi}{2} f(u).$$

Im ersten ersetzen wir w durch $-w$ und erhalten

$$\lim \int_{-\frac{u}{2}}^{0} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w+u)\, dw = \lim \int_0^{\frac{u}{2}} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(u-2w)\, dw = \tfrac{1}{2}\pi f(u).$$

Folglich ist

3. $$J_1 = 2\pi f(u).$$

Wird $f(u)$ für einen Werth von u discontinuirlich, so ist, wie man aus den beiden Bestandtheilen von J_1 sofort erkennt, für diesen Werth von u

$$J_1 = \pi[f(u-0) + f(u+0)],$$

wenn man mit $f(u-0)$ und $f(u+0)$ die Grenzwerthe bezeichnet, welche $f(u-x)$ und $f(u+x)$ erreichen, wenn die positive Zahl x zur Grenze Null abnimmt.

Für $u = 0$ fallen die Grenzen des ersten Theiles von J_1 zusammen, derselbe verschwindet daher und es bleibt

$$J_1 = \pi f(+0), \quad \text{wenn} \quad u = 0.$$

Für $u = \pi$ fallen die Grenzen des zweiten Theils zusammen und es wird daher

$$J_1 = \pi f(\pi - 0), \quad \text{wenn} \quad u = \pi.$$

Das Integral J_2 verschwindet nach 2., sobald

$$0 < u < \pi;$$

ist $u = 0$, so ergiebt sich

$$J_2 = \pi f(+0).$$

Der Fall $u = \pi$ bedarf aber noch einer besonderen Untersuchung. In diesem Falle ist

$$J_2 = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w-\pi)\, dw.$$

Setzt man nun $w = \pi - x$, so erhält man

$$J_2 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(\pi - x)\, dx.$$

Daher ist

4. $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w-\pi)\, dw = \frac{\pi}{2} f(\pi).$$

Sollte $f(u)$ an der Stelle $u = \pi$ discontinuirlich sein, so hat man, wie aus der Herleitung sofort erkannt wird, für $f(\pi)$ in dieser Gleichung den Grenzwerth $f(\pi - 0)$ zu nehmen.

Führt man diese Ergebnisse in No. 5, 7. und 8. ein, so erhält man schliesslich die beiden Sätze*): Die periodische unendliche Reihe

$$A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + A_3 \cos 3u + \ldots,$$

in welcher

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(v)\, dv, \quad A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(v) \cos kv\, dv,$$

und $f(v)$ eine innerhalb der Integrationsgrenzen 0 und π endliche Function ist, hat für jeden Werth von u von 0 bis π einschliesslich beider Grenzen die Summe $f(u)$, sobald $f(u)$ continuirlich ist; erleidet $f(u)$ Unterbrechungen der Continuität, so dass für einen (oder einige) Werthe von u die Grenzwerthe $f(u-0)$ und $f(u+0)$ von einander

*) Lejeune-Dirichlet, Crelle, Bd. 4, pag. 94. Schloemilch, Compendium, 2. Bd., 2. Aufl., pag. 123.

verschieden sind, so ergiebt für diese Werthe von u die Summe der Reihe das arithmetische Mittel dieser beiden Grenzwerthe.

Die periodische unendliche Reihe

$$B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + B_1 \sin 3u + \ldots,$$

in welcher

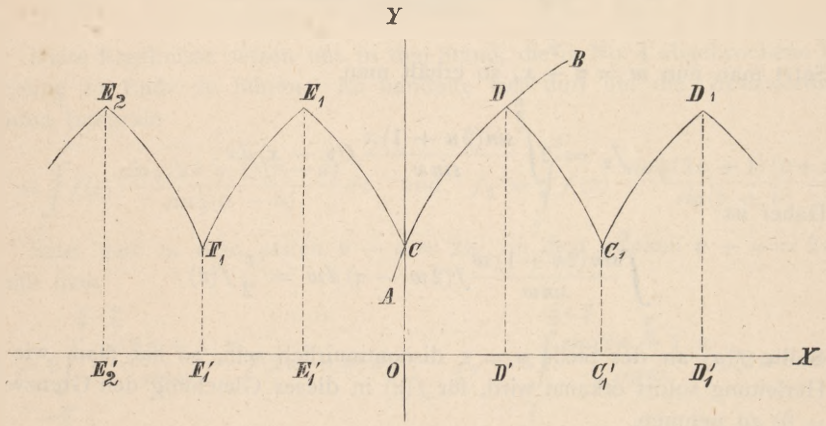
$$B_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(v) \sin kv \, dv,$$

und $f(v)$ eine innerhalb 0 und π endliche Function ist, hat für jeden Werth von u von 0 bis π, ausschliesslich beider Grenzen, den Werth $f(u)$, sobald $f(u)$ continuirlich ist; an Stellen, wo $f(u)$ discontinuirlich wird, ergiebt sie das arithmetische Mittel aus $f(u-0)$ und $f(u+0)$; für die Grenzen $u = 0$ und $u = \pi$ verschwindet die Reihe.

Durchläuft u die Werthe von π bis 2π, so nimmt die Cosinusreihe in umgekehrter Reihenfolge dieselben Werthe, die Sinusreihe die entgegengesetzt gleichen an, wie von 0 bis π; innerhalb der Intervalle für u von 2π bis 4π, 4π bis 6π u. s. w., sowie -6π bis 0, -4π bis -2π, -6π bis -4π u. s. w. wiederholen sich für beide Reihen die Werthe des Intervalles 0 und 2π.

Ist AB die Curve $y = f(x)$ und $OD' = D'C_1' = C_1'D'_1 + \ldots = E_1'O = F_1'E_1' = E_2'F_1' = \ldots = \pi$, so fällt die Curve

$$Y = A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + A_3 \cos 3u + \ldots$$



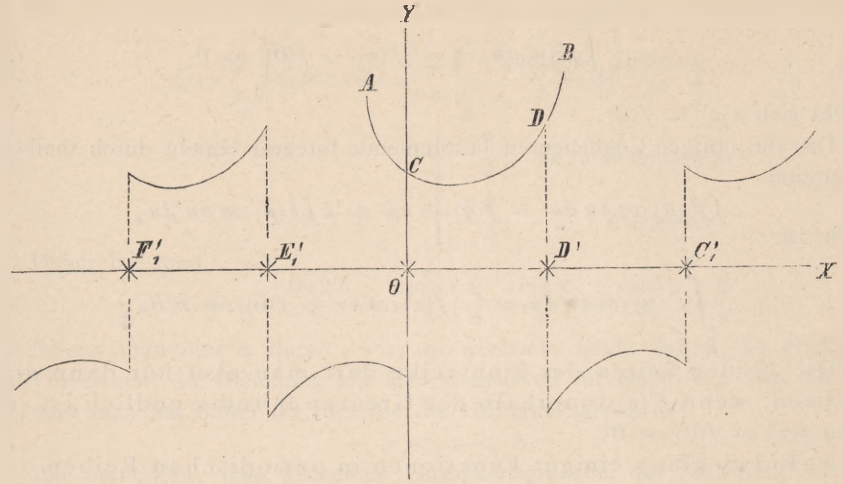
(M. 534.)

innerhalb der Punkte C und D mit der Curve AB zusammen; ihr weiterer Verlauf besteht aus den Bögen DC_1, C_1D_1, $D_1C_2 \ldots$, CE_1, E_1F_1, $F_1E_2 \ldots$, von denen je zwei benachbarte zu der gemeinsamen Ordinate symmetrisch liegen. Die Curve (Fig. 535)

$$Y = B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + B_3 \sin 3u + \ldots$$

fällt innerhalb der Punkte C und D ebenfalls mit AB zusammen, hat aber in O und D' zwei isolirte Punkte, ebenso in C'_1, D'_1, C'_2 .. sowie in E'_1, F'_1 $E'_2 \ldots$ Die zu OD', $D'C'_1$, $C'_1D'_1 \ldots OE_1$, $E'_1F'_1 \ldots$ gehörenden Curvenbogen decken sich ohne vorherige Umwendung und liegen abwechselnd auf verschiedenen Seiten der Abscissenachse.

8. Ehe wir zu Anwendungen übergehen, wollen wir noch in Kürze entscheiden, ob, bez. unter welchen Umständen es gestattet ist, aus den beiden Gleichungen



(M. 535.)

1. $$f(u) = A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + \ldots$$
2. $$f(u) = B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + \ldots$$

durch Differentiation beider Seiten neue Gleichungen abzuleiten.

Die Differentiation der Cosinusreihe ergiebt

$$f'(u) = -A_1 \sin u - 2A_2 \sin 2u - 3A_3 \sin 3u \ldots$$

Soll diese Gleichung gelten, so muss $f'(u)$ in eine Sinusreihe entwickelt werden können; es muss daher $f'(u)$ endlich sein von 0 bis π und die Cofficienten müssen die Werthe haben

3. $$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f'(v) \sin kv \, dv = -kA_k.$$

Durch theilweise Integration erhält man

$$\int f'(v) \sin kv \, dv = f(v) \sin kv - k\int f(v) \cos kv \, dv.$$

Werden die Integrale von 0 bis π erstreckt, so folgt

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f'(v) \sin kv \, dv = -\frac{2k}{\pi}\int_0^\pi f(v) \cos kv \, dv.$$

Es ist daher in der That die Gleichung 3. erfüllt. Die beiden Seiten der Gleichung 1. dürfen daher differentiirt werden, sobald $f'(u)$ innerhalb des Intervalls 0 bis π endlich bleibt.

Aus der Sinusreihe erhält man

$$f'(u) = B_1 \cos u + 2B_2 \cos 2u + 3B_3 \cos 3u + \ldots$$

Es muss daher $f'(u)$ in einer Cosinusreihe entwickelbar sein, deren erstes Glied verschwindet. Dazu gehört, dass $f(u)$ von 0 bis π endlich bleibt, dass das Integral, welches das erste Glied der Reihe ergiebt,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f'(u) \, du.$$

verschwindet, und dass

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f'(u) \cos ku \, du = kB_k.$$

Aus der Bedingung

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f'(u)\,du = \frac{1}{\pi}\,[f(\pi) - f(0)] = 0$$

ergiebt sich $f(\pi) = f(0)$.

Das die übrigen Coefficienten bestimmende Integral ergiebt durch theilweise Integration

$$\int f'(u)\cos ku\,du = f(u)\cos ku + k\int f(u)\sin ku\,du,$$

mithin ist

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f'(u)\cos ku\,du = \frac{2}{\pi}\,[f(\pi)\cos k\pi - f(0)] + kB_k.$$

Die beiden Seiten der Sinusreihe darf man also nur dann differentiiren, wenn $f'(u)$ innerhalb der Grenzen 0 und π endlich ist, und wenn $f(\pi) = f(0) = 0$.

9. Entwicklung einiger Functionen in periodischen Reihen.

A. Durch die Sinusreihe kann eine constante Grösse dargestellt werden. Setzt man $f(x) = 1$, so erhält man

$$B_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin kv\,dv = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\cos k\pi}{k} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } k \text{ gerade,} \\ \dfrac{4}{\pi k}, & \text{„ ungerade,} \end{cases}$$

und daher

$$\frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7}\;\ldots\,,$$
$$0 < x < \pi.$$

Für $x = \frac{\pi}{2}$ erhält man hieraus die LEIBNITZ'sche Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

B. Für die Entwicklung von $f(x) = x$ nach der Cosinusreihe ergiebt sich

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2}\right]_0^\pi,$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\cos k\pi}{k^2} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } k \text{ gerade,} \\ \dfrac{4}{\pi k^2}, & \text{„ } k \text{ ungerade;} \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \ldots\right).$$

Hierfür kann man setzen

$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \ldots$$
$$0 \leqq x \leqq \pi.$$

An den Grenzen der Gültigkeit, für $x = 0$ und $x = \pi$ erhält man gleichmässig

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$$

Setzt man $f(x) = x$ in die Sinusreihe ein, so entsteht

$$B_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2}\right]_0^\pi,$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{k}, & \text{wenn } k \text{ ungerade,} \\ -\dfrac{2}{k}, & \text{„ } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Daher hat man

$$\frac{1}{2}x = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} - \ldots$$

Ersetzt man hier x durch $-x$, so wechseln beide Seiten der Gleichung das Vorzeichen; die Gleichung gilt also ebensoweit für negative x, wie für positive, und man hat daher für dieselbe die Gültigkeitsgrenzen

$$-\pi < x < \pi.$$

Wir bemerken, dass dieselben Gültigkeitsgrenzen der Sinusreihe für jede Function von x bestehen, die für $x = 0$ verschwindet und mit x das Vorzeichen wechselt.

C. Setzt man in der Cosinusreihe $f(x) = \cos\mu x$, wobei μ keine ganze Zahl bezeichnen mag, so ist

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\mu x\,dx = \frac{\sin\mu\pi}{\mu\pi},$$

$$A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\mu x\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos(k+\mu)x + \cos(k-\mu)x]\,dx,$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(k+\mu)x}{k+\mu} + \frac{\sin(k-\mu)x}{k-\mu}\right]_0^\pi = (-1)^{k+1}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\mu\sin\mu\pi}{k^2-\mu^2}.$$

Daher ergiebt sich

$$\frac{\pi}{2\mu}\cdot\frac{\cos\mu x}{\sin\mu\pi} = \frac{1}{2\mu^2} + \frac{\cos x}{1^2-\mu^2} - \frac{\cos 2x}{2^2-\mu^2} + \frac{\cos 3x}{3^2-\mu^2} - \ldots$$
$$0 \leqq x \leqq \pi.$$

D. Um $f(x) = \sin\mu x$ in eine Sinusreihe zu entwickeln, hat man

$$B_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\mu x\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos(k+\mu)x - \cos(k-\mu)x]\,dx,$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(k+\mu)x}{k+\mu} - \frac{\sin(k-\mu)x}{k-\mu}\right]_0^\pi = (-1)^{k+1}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{k\sin\mu\pi}{k^2-\mu^2}.$$

Mithin ist

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\mu x}{\sin\mu\pi} = \frac{\sin x}{1^2-\mu^2} - \frac{2\sin 2x}{2^2-\mu^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2-\mu^2} - \frac{5\sin 5x}{5^2-\mu^2} + \ldots$$

Macht man in C und D die Substitutionen $x = 0$, $x = \pi$ und $x = \frac{1}{2}\pi$, so entsteht

$$\frac{\pi}{2\mu}\cdot\frac{1}{\sin\mu\pi} = \frac{1}{2\mu^2} + \frac{1}{1^2-\mu^2} - \frac{1}{2^2-\mu^2} + \frac{1}{3^2-\mu^2} - \ldots$$

$$\frac{1}{2\mu^2} - \frac{\pi}{2\mu}\cdot\cot\mu\pi = \frac{1}{1^2-\mu^2} + \frac{1}{2^2-\mu^2} + \frac{1}{3^2-\mu^2} + \ldots$$

$$\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\mu\pi} = \frac{1}{1^2-\mu^2} - \frac{3}{3^2-\mu^2} + \frac{5}{5^2-\mu^2} - \frac{7}{7^2-\mu^2} + \ldots,$$

die für jeden Werth von μ gelten.

E. Für die Function $x\,sin\,x$ hat man

$$\int_0^\pi x\,sin x\,cos kx\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi x\,sin(k+1)\,x\,dx - \tfrac{1}{2}\int_0^\pi x\,sin(k-1)\,x\,dx\,,$$

$$\int_0^\pi x\,sin(k\pm 1)x\,dx = \left[\frac{-x\,cos(k\pm 1)\,x}{k\pm 1} + \frac{sin(k\pm 1)\,x}{(k\pm 1)^2}\right]_0^\pi, \quad \text{also}$$

$$\int_0^\pi x\,sin x\,cos kx\,dx = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{k^2-1}\,.$$

Auf den Fall $k = 1$ ist diese Formel nicht anwendbar; man findet hier direkt

$$\int_0^\pi x\,sin\,x\,cos\,x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi x\,sin\,2x\,dx = -\frac{\pi}{4}\,.$$

Fügt man hierzu noch

$$\int_0^\pi x\,sin\,x\,dx = \pi\,,$$

so gewinnt man die Entwicklung

$$\frac{1}{2}x\,sin x = \frac{1}{2} + \frac{cos\,x}{4} - \frac{cos\,2x}{1\cdot 3} + \frac{cos\,3x}{2\cdot 4} - \frac{cos\,4x}{3\cdot 5} + \cdot\cdot$$

Die beiden Seiten dieser Gleichung ändern sich nicht, wenn x das Vorzeichen wechselt; daher gilt diese Entwicklung zwischen den Grenzen

$$-\pi \leqq x \leqq \pi\,.$$

Dieselben Gültigkeitsgrenzen für die Cosinusreihe treten für jede Function ein, die für entgegengesetzt gleiche x gleiche Werthe hat.

F. Bekanntlich ist (§ 5, No. 9)

$$\int e^{\mu x} cos\,kx\,dx = \frac{e^{\mu x}}{\mu^2 + k^2}(\mu\,cos\,kx + k\,sin\,kx) + C\,,$$

$$\int e^{\mu x} sin\,kx\,dx = \frac{e^{\mu x}}{\mu^2 + k^2}(\mu\,sin\,kx - k\,cos\,kx) + C\,.$$

Daher hat man

$$\int_0^\pi e^{\mu x}\,cos\,kx\,dx = \frac{\mu}{\mu^2 + k^2}(e^{\mu\pi}\,cos\,k\pi - 1)\,,$$

$$\int_0^\pi e^{-\mu x} cos\,kx\,dx = -\frac{\mu}{\mu^2 + k^2}(e^{-\mu\pi} cos\,k\pi - 1)\,,$$

$$\int_0^\pi e^{\mu x}\,sin\,kx\,dx = \frac{k}{\mu^2 + k^2}(1 - e^{\mu\pi}\,cos\,k\pi)\,,$$

$$\int_0^\pi e^{-\mu x} sin\,kx\,dx = \frac{k}{\mu^2 + \pi^2}(1 - e^{-\mu\pi} cos\,k\pi)\,.$$

Mit Hülfe dieser Integrale erhält man leicht die beiden Entwicklungen

$$\frac{\pi}{2\mu}\cdot\frac{e^{\mu x} + e^{-\mu x}}{e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}} = \frac{1}{2\mu^2} - \frac{cos\,x}{1^2 + \mu^2} + \frac{cos\,2x}{2^2 + \mu^2} - \frac{cos\,3x}{3^2 + \mu^2} + \cdot\cdot$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{\mu x} - e^{-\mu x}}{e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}} = \frac{sin\,x}{1^2 + \mu^2} - \frac{2\,sin\,2x}{2^2 + \mu^2} + \frac{3\,sin\,3x}{3^2 + \mu^2} - \cdot\cdot\cdot$$

10. Es ist nicht nöthig, dass die Function $f(x)$, welche in eine Cosinus- bez. Sinusreihe verwandelt wird, innerhalb des ganzen Intervalles 0 und π nach dem-

selben Gesetze gebildet sei; man kann vielmehr die Curve CD (Fig. 534) aus einzelnen Stücken zusammensetzen, deren jedes einer andern Gleichung entspricht. Gilt

von 0 bis x_1 die Function $f_1(x)$,
„ x_1 „ x_2 „ „ „ $f_2(x)$,
„ x_2 „ x_3 „ „ „ $f_3(x)$,
. . . .
„ x_{r-1} „ π „ „ „ $f_r(x)$,

so hat man jedes bei der Berechnung der Coefficienten $A_0 A_1 A_2 \cdot\cdot B_1 B_2 \cdot\cdot$ vorkommende von 0 bis π erstreckte Integral in folgender Weise zu zerlegen

$$\int_0^\pi f(x)\,cos\,kx\,dx = \int_0^{x_1} f_1(x)\,cos\,kx\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f_2(x)\,cos\,kx\,dx$$

$$+ \int_{x_2}^{x_3} f_3(x)\,cos\,kx\,dx + \cdot\cdot + \int_{x_{r-1}}^{\pi} f_r(x)\,cos\,kx\,dx\,.$$

und die einzelnen Theilintegrale zu berechnen.

Um hierfür ein einfaches Beispiel zu haben, wollen wir annehmen, es soll für $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2}\pi$ eine beliebige, endlich bleibende Function $\varphi(x)$ und von $\frac{1}{2}\pi$ bis π die Function $\varphi(\pi - x)$ gelten; für $x = \frac{1}{2}\pi$ ergeben beide Functionen den gemeinsamen Werth $\varphi(\frac{1}{2}\pi)$, so dass an der Uebergangsstelle keine Unterbrechung der Continuität eintritt. Für die Entwicklung in eine Sinusreihe hat man

$$B_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)\,sin\,kx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi(\pi - x)\,sin\,kx\,dx\,.$$

Substituirt man im zweiten Integrale $\pi - x = \xi$, so erhält man

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi(\pi - x)\,sin\,kx\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\xi)\,sin\,k(\pi - \xi)\,d\xi = -\,cos\,k\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\xi)\,sin\,k\xi\,d\xi\,.$$

Da bei bestimmten Integralen auf die Bezeichnung der Integrationsvariabeln nichts ankommt, so kann man hier ξ wieder durch x ersetzen, und erhält

$$B_k = 0\,, \quad \text{wenn } k \text{ gerade,}$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)\,sin\,kx\,dx\,, \quad \text{wenn } k \text{ ungerade.}$$

Daher hat man die Entwicklung

$$\varphi(x) = B_1\,sin x + B_3\,sin 3x + B_5\,sin 5x + \cdot\cdot\cdot\,,$$

wobei

$$B_k = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)\,sin\,kx\,dx\,,$$

und x auf den Spielraum von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ angewiesen ist.

Setzt man $\varphi(x) = x$, so erhält man

$$B_{2k+1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,sin(2k+1)x\,dx = \frac{4}{\pi}\left[-\frac{x\,cos(2k+1)x}{2k+1} + \frac{sin(2k+1)x}{(2k+1)^2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{4}{\pi}\cdot sin\frac{\frac{1}{2}(2k+1)\pi}{(2k+1)^2}\,.$$

Daher hat man in Uebereinstimmung mit No. 9, B

$$\frac{\pi}{4}\cdot x = \sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \dots,$$

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}.$$

11. Nimmt man ferner von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ die Function $\varphi(x) = x^2$ von $\frac{1}{2}\pi$ bis π aber $\varphi(x) = 0$, so hat die Curve CD an der Stelle $x = \frac{1}{2}\pi$ eine Unterbrechung der Continuität, es ist nämlich

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi^2}{4}, \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = 0.$$

Entwickelt man für diese Function die Cosinusreihe, so erhält man, da die von $\frac{1}{2}\pi$ bis π erstreckten Theile der Coefficientenintegrale wegen $\varphi(x) = 0$ verschwinden

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,dx = \frac{\pi^2}{24},$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot A_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos kx\,dx = \left[\frac{x^2 \sin kx}{k}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin kx\,dx,$$

$$= \left[\frac{x^2 \sin kx}{k} + \frac{2x\cos kx}{k^2} - \frac{2\sin kx}{k^3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{k^2\pi^2 - 8}{4k^3}\sin\dfrac{k\pi}{2}, & \text{wenn } k \text{ ungerade}, \\ \dfrac{\pi}{k^2}\cos\dfrac{k\pi}{2}, & \text{wenn } k \text{ gerade}. \end{cases}$$

Daher hat man die von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ gültige Reihe

$$x^2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{12} + \cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \dots\right)$$
$$- \frac{4}{\pi}\left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3^3} + \frac{\cos 5x}{5^3} - \frac{\cos 7x}{7^3} + \dots\right)$$
$$- 2\left(\frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \frac{\cos 6x}{6^2} - \frac{\cos 8x}{8^2} + \dots\right).$$

Setzen wir zur Prüfung dieser Entwicklung auf der rechten Seite $x = \frac{1}{2}\pi$, so muss sich das arithmetische Mittel aus $\varphi(\frac{1}{2}\pi - 0)$ und $\varphi(\frac{1}{2}\pi + 0)$, d. i. $\frac{1}{8}\pi^2$ ergeben. Wir erhalten, da die Cosinus aller ungeraden Vielfachen von $\frac{1}{2}\pi$ verschwinden,

$$\frac{\pi^2}{24} + 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots\right).$$

Die eingeklammerte Reihe ist der vierte Theil von

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Bezeichnet man diese Summe mit S, so hat man

$$S = \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots\right).$$

Der erste Theil der rechten Seite ist $\frac{1}{8}\pi^2$ (No. 9, B); der zweite ist $\frac{1}{4}S$; daher hat man

$$\tfrac{3}{4}S = \tfrac{1}{8}\pi^2,$$

folglich ist

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

Mithin ergiebt sich in der That

$$\frac{\pi^2}{24} + 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots\right) = \frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{8}.$$

12. Durch eine einfache Substitution kann man aus den Reihen

1. $\quad f(x) = A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + \dots$
2. $\quad f(x) = B_1\sin x + B_2\sin 2x + B_3\sin 3x + \dots$

neue periodische Reihen ableiten, deren Gültigkeit nicht auf das Gebiet 0 bis π beschränkt ist.

Macht man in einer für $0 < x < a$ endlichen Function $\varphi(x)$ die Substitution

$$x = \frac{ay}{\pi},$$

so erhält man

$$\varphi\left(\frac{ay}{\pi}\right),$$

und diese Function von y ist endlich von $y = 0$ bis $y = \pi$. Man kann sie daher nach 1. und 2. entwickeln und erhält

3. $$\varphi\left(\frac{ay}{\pi}\right) = A_0 + A_1\cos y + A_2\cos 2y + \dots,$$
$$0 \leqq y \leqq \pi,$$

4. $$\varphi\left(\frac{ay}{\pi}\right) = B_1\sin y + B_2\sin 2y + B_3\sin 3y + \dots,$$
$$0 < y < \pi.$$

Die Coefficienten haben hier die Werthe

5. $$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi\left(\frac{ay}{\pi}\right), \quad A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi\left(\frac{ay}{\pi}\right)\cos ky\,dy,$$
$$B_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi\left(\frac{ay}{\pi}\right)\sin ky\,dy.$$

Substituirt man nun in 3., 4. und 5. wieder x für y, so erhält man die Reihen

6. $$\varphi(x) = A_0 + A_1\cos\frac{\pi x}{a} + A_2\cos\frac{2\pi x}{a} + A_3\cos\frac{3\pi x}{a} + \dots,$$
$$0 \leqq x \leqq a, \quad A_0 = \frac{1}{a}\int_0^a \varphi(x)\,dx, \quad A_k = \frac{2}{a}\int_0^a \varphi(x)\cos\frac{k\pi x}{a}\,dx;$$

7. $$\varphi(x) = B_1\sin\frac{\pi x}{a} + B_2\sin\frac{2\pi x}{a} + B_3\sin\frac{3\pi x}{a} + \dots,$$
$$0 < x < a, \quad B_k = \frac{2}{a}\int_0^a \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx.$$

13. Ist $F(x)$ eine beliebige, von $x = 0$ bis $x = a$ endliche Function, so theilt die Function $F(x) + F(-x)$ diese Eigenschaft und nimmt für entgegengesetzt gleiche Werthe von x gleiche Werthe an; da die letztere Eigenschaft auch der Cosinusreihe 6. zukommt, so gilt für diese Function die Reihe 6. auch noch zwischen den Grenzen 0 und $-a$. Für die Coefficienten findet sich

$$A_0 = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,dx + \frac{1}{a}\int_0^a F(-x)\,dx\,,$$

$$A_k = \frac{2}{a}\int_0^a F(x)\cos\frac{k\pi x}{a}\,dx + \frac{2}{a}\int_0^a F(-x)\cos\frac{k\pi x}{a}\,dx\,.$$

Ersetzt man in den $F(-x)$ enthaltenden Integralen x durch $-x$, so erhält jedes die Grenzen 0 und $-\pi$ und lässt sich mit dem vorhergehenden vereinigen; es entsteht

$$A_0 = \frac{1}{a}\int_{-a}^a F(x)\,dx\,, \qquad A_k = \frac{2}{a}\int_{-a}^a F(x)\cos\frac{k\pi x}{a}\,dx\,.$$

Für diese Werthe der Coefficienten ist also

1. $$F(x) + F(-x) = A_0 + A_1\cos\frac{\pi x}{a} + A_2\cos\frac{2\pi x}{a} + \ldots$$
$$-a \leq x \leq a\,.$$

Die Function $F(x) - F(-x)$ verschwindet für $x = 0$ und wechselt mit x das Zeichen. Entwickelt man sie daher nach No. 12, 7, so gilt die Reihe von $-a$ bis $+a$. Für die Coefficienten ergiebt sich

$$B_k = \frac{2}{a}\int_0^a F(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx - \frac{2}{a}\int_0^a F(-x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx = \frac{2}{a}\int_{-a}^a F(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx\,.$$

Bei diesen Werthen der Coefficienten ist

2. $$F(x) - F(-x) = B_1\sin\frac{\pi x}{a} + B_2\sin x\frac{2\pi x}{a} + B_3\sin\frac{3\pi x}{a} + \ldots$$
$$-a < x < a\,.$$

Nimmt man die halbe Summe der Gleichungen 8. und 9., so erhält man schliesslich

3. $$\begin{aligned} F(x) &= A_0 + A_1\cos\frac{\pi x}{a} + A_2\cos\frac{2\pi x}{a} + A_3\cos\frac{3\pi x}{a} + \ldots \\ &\quad + B_1\sin\frac{\pi x}{a} + B_2\sin\frac{2\pi x}{a} + B_3\sin\frac{3\pi x}{a} + \ldots \end{aligned}$$
$$-a < x < a\,,$$

wobei die Coefficienten die Werthe haben

$$A_0 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^a F(x)\,dx\,, \quad A_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^a F(x)\cos\frac{k\pi x}{a}\,dx\,, \quad B_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^a F(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx\,.$$

Da man für a beliebig grosse Werthe nehmen kann, so folgt, dass jede Function innerhalb eines beliebig grossen Gebiets durch eine periodische Cosinus-Sinus-Reihe von der Form 3. dargestellt werden kann, wenn sie nur innerhalb dieses Gebietes endlich bleibt.

Soll eine gegebene Function $f(x)$ für alle zwischen $-a$ und a liegenden Werthe der Variabeln durch die Reihe 3. dargestellt werden, so ist nur eine solche Darstellung möglich; wenn dagegen die Forderung gestellt wird, dass die Reihe 3. nur für die zwischen b und c enthaltenen Werthe der Variabeln mit $f(x)$ übereinstimmen soll, wobei $-a < b < c < a$, so kann man unzählig viele Entwicklungen angeben; denn man kann dann für die nicht zwischen b und c enthaltenen Werthe der Variabeln, die bei b und c abgebrochene Function

$f(x)$ durch beliebige endlich bleibende Functionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ fortsetzen (vergl. No. 10).

14. Die in No. 12 entwickelten Reihen gestatten eine werthvolle Anwendung auf das Problem der Umkehrung der Functionen*).

Dieses Problem besteht darin, y aus der Gleichung $x = \varphi(y)$ als Function von x, oder allgemeiner irgend eine Function $F(y)$ als Function von x auszudrücken.

Da $F(y)$ eine Function von x ist, so lässt sich $F(y)$ innerhalb gewisser Grenzen durch eine Cosinusreihe ausdrücken

1. $$F(y) = A_0 + A_1\cos\frac{\pi x}{a} + A_2\cos\frac{2\pi x}{a} + A_3\cos\frac{3\pi x}{a} + \ldots$$
$$0 < x < a\,.$$

Die Coefficienten sind

$$A_0 = \frac{1}{a}\int_0^a F(y)\,dx\,, \qquad A_k = \frac{2}{a}\int_0^a F(y)\cos\frac{k\pi x}{a}\,dx\,.$$

Durch theilweise Integration folgt hieraus zunächst

$$A_0 = \frac{1}{a}\Big[xF(y)\Big]_0^a - \frac{1}{a}\int_{y_0}^{y_1} xF'(y)\,dy\,,$$

$$A_k = \frac{2}{k\pi}\Big[F(y)\sin\frac{k\pi x}{a}\Big]_0^a - \frac{2}{k\pi}\int_{y_0}^{y_1} F'(y)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dy\,,$$

wenn $x = 0$ und a die Werthe $y = y_0$ und y_1 entsprechen; hieraus folgt weiter

2. $$A_0 = F(y_1) - \frac{1}{a}\int_{y_0}^{y_1}\varphi(y)F'(y)\,dy\,, \quad A_k = -\frac{2}{k\pi}\int_{y_0}^{y_1} F'(y)\sin\frac{k\pi x}{a}\varphi(y)\,dy\,.$$

Betreffs der Integrationsgrenzen ist hier Folgendes zu bemerken. Die nach x genommenen Coefficientenintegrale waren von 0 bis zu der positiven Zahl a erstreckt, und es war dabei vorausgesetzt, dass x von 0 bis a stetig wachse. Will man nun x durch y ersetzen, so hat man zunächst die Gleichung

$$0 = \varphi(y)$$

aufzulösen; eine reale Wurzel β dieser Gleichung ist dann die der Grenze $x = 0$ entsprechende Grenze für y. Im Allgemeinen wechselt $\varphi(y)$ das Zeichen, wenn y durch den Werth β hindurchgeht; damit nun x von 0 bis zu der noch unbestimmten oberen Integralgrenze wachse, muss man y vom Werthe $y = \beta$ zunehmen oder abnehmen lassen, je nachdem $\varphi(y)$ von $\varphi(\beta) = 0$ aus mit y zugleich wächst oder nicht, und darf die Integration nach y nicht weiter ausdehnen, als bis zu einem solchen Werthe von y, für welchen das Wachsthum von $\varphi(y)$ in eine Abnahme übergeht, d. i. bis zu dem Werthe $y = \beta_1$, welchem das dem Werthe β der Variabeln y zunächst liegende Maximum der Function $\varphi(y)$ zugehört. Somit ist also die obere Grenze a der Reihe 1. nicht ganz willkürlich, sondern a darf nicht grösser sein, als $\varphi(\beta_1)$.

Ist nun b eine zwischen β und β_1 liegende Zahl, so hat man in den obigen Formeln a, y_0, y_1 durch $\varphi(b)$, β, b zu ersetzen und gewinnt mithin

$$F(y) = A_0 + A_1\cos\frac{\pi x}{\varphi(b)} + A_2\cos\frac{2\pi x}{\varphi(b)} + \ldots$$
$$0 \leq x \leq \varphi(b)\,.$$

*) SCHLOEHMILCH, Compendium 2. Bd. 2. Aufl. pag. 152.

$$A_0 = F(b) - \frac{1}{\varphi(b)}\int\limits_\beta^b F'(y)\varphi(y)dy, \quad A_k = -\frac{2}{k\pi}\int\limits_\beta^b F'(y)\sin\frac{k\pi\varphi(y)}{\varphi(b)}dy.$$

Zu jeder realen Wurzel β der Gleichung

$$\varphi(y) = 0$$

erhält man hiernach eine besondere Umkehrungsreihe; die Gültigkeitsgebiete dieser Reihen in Bezug auf y schliessen einander aus.

Für die Grenzbestimmungen wollen wir ein Beispiel geben. Wir wählen hierzu die Aufgabe, aus der Gleichung

$$x = ye^{-y}$$

y durch x auszudrücken. Die Function ye^{-y} verschwindet für $y = 0$ und für $y = \infty$.

Zur Bestimmung der eminenten Werthe ist die Gleichung aufzulösen

$$e^{-y} - ye^{-y} = 0.$$

Sie liefert $y = 1$; das zugehörige Maximum von x ist $1:e$. Man kann daher eine Umkehrung für das Gebiet $y = 0$ bis $y = 1$, und eine zweite für $y = \infty$ bis $y = 1$ entwickeln.

Für die erste erhält man

$$y = A_0 + A_1\cos\pi ex + A_2\cos 2\pi ex + \ldots$$

$$0 \leqq x \leqq \frac{1}{e},$$

$$A_0 = 1 - e\int\limits_0^1 ye^{-y}dy, \quad A_k = -\frac{2}{k\pi}\int\limits_0^1 \sin(k\pi eye^{-y})\,dy.$$

Für die zweite Umkehrung ist $\beta = \infty$; um die Gültigkeit möglichst weit zu erstrecken, wollen wir $b = 1$ nehmen. Dann haben wir

$$Y = A_0 + A_1\cos\pi ex + A_2\cos 2\pi ex + \ldots$$

$$0 \leqq x \leqq \frac{1}{e},$$

$$A_0 = 1 + e\int\limits_1^\infty ye^{-y}dy, \quad A_k = \frac{2}{k\pi}\int\limits_0^\infty \sin(k\pi eye^{-y})\,dy.$$

Die Integrale zur Bestimmung der Coefficienten können hier wie in den meisten Anwendungen der Umkehrungsreihen nur durch unendliche Reihen berechnet werden.

Man kann auch mit Hülfe der Sinusreihe das Umkehrungsproblem lösen; die Entwicklung bietet keine neuen Schwierigkeiten; wir sehen daher davon ab, sie hier mitzutheilen.

---

15. Die für jede zwischen $x = -a$ und $+a$ endliche Function $F(x)$ gültige Gleichung

$$F(x) = A_0 + A_1\cos\frac{\pi x}{a} + A_2\cos\frac{2\pi x}{a} + A_3\cos\frac{3\pi x}{a} + \ldots$$
$$+ B_1\sin\frac{\pi x}{a} + B_2\sin\frac{2\pi x}{a} + B_3\sin\frac{3\pi x}{a} + \ldots$$

1. $$A_0 = \frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^a F(t)dt, \quad A_k = \frac{1}{a}\int\limits_{-a}^a F(t)\cos\frac{k\pi t}{a}dt, \quad B_k = \frac{1}{a}\int\limits_{-a}^a F(t)\sin\frac{k\pi t}{a}dt,$$

kann man auch in der Form schreiben

$$F(x) = \frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^a F(t)dt + \sum_1^\infty{}^k \frac{1}{a}\int\limits_{-a}^a F(t)\left(\cos\frac{k\pi t}{a}\cos\frac{k\pi x}{a} + \sin\frac{k\pi t}{a}\sin\frac{k\pi x}{a}\right)dt,$$

$$= \frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^a F(t)dt + \sum_1^\infty{}^k \frac{1}{a}\int\limits_{-a}^a F(t)\cos\frac{k\pi}{a}(t-x)\,dt.$$

Da die unter dem Summenzeichen stehende Function für entgegengesetzt gleiche k gleiche Werthe hat, so hat man

$$\sum_1^\infty = \sum_{-\infty}^{-1};$$

man kann die Summe daher nach dem Schema zerlegen

$$\sum_1^\infty = \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty + \tfrac{1}{2}\sum_{-\infty}^{-1}.$$

Da ferner die Function für $k = 0$ in $F(t)dt$ übergeht, so erhält man schliesslich die Zuzammenfassung

2. $$F(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^\infty{}^k \frac{\pi}{a}\int\limits_{-a}^a F(t)\cos k\frac{\pi}{a}(t-x)\,dt.$$

Ist a eine sehr grosse Zahl, so werden die mit Cosinus multiplicirten Glieder der Reihe 1. nahezu constant, während die Glieder des zweiten Theils wegen der Sinus gegen den ersten Theil unbeträchtlich klein werden. Da nun die Reihe nach wie vor die Function $F(x)$ ausdrückt, so folgt, dass die Anzahl der Glieder, durch die man eine hinlängliche Annäherung erzielt, im Verhältniss zu a sehr gross sein muss. Lässt man in 2. die Zahl a unendlich wachsen, so hat man daher daran festzuhalten, dass die äussersten Grenzen für k zu dem unendlichen a ein unendlich grosses Verhältniss haben.

Ist a unendlich, so ist $\pi : a$ unendlich klein. Bezeichnet man $k\pi : a$ durch u, so wächst u nach der über k soeben gemachten Bemerkung von $-\infty$ bis $+\infty$, die Grösse $\pi : a$ ist ein verschwindend kleiner Theil von u und kann mit Δu bezeichnet werden.

Damit geht aus 2. hervor

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^\infty{}^u \left[\int\limits_{-\infty}^\infty F(t)\cos u(t-x)\,dt\right]\Delta u.$$

Aus dem Begriffe des bestimmten Integrals folgt, dass man hierfür setzen kann

3. $$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty F(t)\cos u(t-x)\,du\,dt.$$

Hierbei gilt die von den periodischen Reihen her bekannte Beschränkung, dass $F(x)$ innerhalb des ganzen realen Gebiets nicht unendlich gross werden darf; ferner, dass das Doppelintegral

$$J = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty F(t)\cos u(t-x)\,dt\,du$$

für solche Werthe von x, für welche $F(x-0)$ von $F(x+0)$ verschieden sind, das arithmetische Mittel dieser beiden Grenzwerthe ergiebt.

Wie bekannt, ist es nicht nöthig, dass die Function $F(x)$ innerhalb des ganzen Intervalls von $-\infty$ bis ∞ immer dasselbe Gezetz befolgt; es steht vielmehr vollkommen frei, die Curve

$$y = F(x)$$

aus ganz beliebig gewählten Theilen verschiedener Curven zusammenzusetzen; dabei kann man nach Willkür die einzelnen Theile continuirlich zusammenhängen lassen, oder an den Uebergangsstellen Discontinuitäten anordnen.

Von besonderem Interesse ist es, die Function von $-\infty$ bis zu einer beliebigen Grenze $x = b$ constant $= 0$ zu nehmen, von b bis β mit einer gegebenen Function $F(x)$ zusammenfallen zu lassen, und von $x = \beta$ bis $x = \infty$ wieder constant $= 0$ vorauszusetzen. Das nach t genommene Integral in 3. verschwindet alsdann für die beiden Intervalle $-\infty$ bis b und β bis ∞, und es bleibt

4. $$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{b}^{\beta} F(t) \cos u(t-x)\, du\, dt,$$

$$b < x < \beta.$$

An den Grenzen b und β gilt 4. nicht mehr; es ist vielmehr, da hier die dargestellte Function discontinuirlich ist,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{b}^{\beta} F(t) \cos u(t-b)\, du\, dt = \tfrac{1}{2} F(b),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{b}^{\beta} F(t) \cos u(t-\beta)\, du\, dt = \tfrac{1}{2} F(\beta).$$

Für jedes x, das kleiner als b oder grösser als β ist, hat man

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{b}^{\beta} F(t) \cos u(t-x)\, du\, dt = 0.$$

Die FOURIER'schen Doppelintegrale*) 3. und 4. gewähren das hohe Interesse, dass sie willkürliche endlich bleibende Functionen von x darstellen; und zwar 3. innerhalb des ganzen realen Gebiets, 4. innerhalb eines beliebig gewählten, während ausserhalb desselben das Integral verschwindet.

16. Dieselben Betrachtungen, die wir im vorigen Abschnitte auf die Cosinus-Sinus-Reihe angewendet haben, sind auch für die Cosinusreihe und für die Sinusreihe verwendbar; leichter gelangen wir zu denselben Ergebnissen, wenn wir das Integral No. 15, 3 zum Ausgangspunkte nehmen. Wir transformiren dasselbe zunächst in

1. $$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \left[\cos xu \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cos ut\, dt + \sin ux \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \sin ut\, dt\right].$$

Wir wollen nun für $F(x)$ innerhalb der Grenzen 0 bis ∞ eine willkürliche Function nehmen, für negative x aber die Function so fortsetzen, dass $F(-x) = F(x)$.

Unter dieser Voraussetzung ist

*) FOURIER, Théorie analytique de la chaleur. Paris 1822.

$$\int_{-\infty}^{0} F(t) \sin ut\, dt = -\int_{0}^{\infty} F(t) \sin ut\, dt, \quad \int_{-\infty}^{0} F(t) \cos ut\, dt = \int_{0}^{\infty} F(t) \cos ut\, dt$$

und daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) \sin ut\, dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cos ut\, dt = 2\int_{0}^{\infty} F(t) \cos ut\, dt.$$

Demnach ist schliesslich

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} F(t) \cos xu \cos ut\, du\, dt, \quad 0 \leqq x \leqq \infty.$$

Da das Produkt $\cos xu \cos ut$ unverändert bleibt, wenn u das Zeichen wechselt, so kann man hierfür noch einfacher setzen

2. $$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} F(t) \cos xu \cos ut\, du\, dt$$

$$0 \leqq x \leqq \infty.$$

Wählt man hier wieder die Function gleich Null von $x = 0$ bis $x = b$, willkürlich von b bis β, und gleich Null von β bis ∞, so erhält man

3. $$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{b}^{\beta} F(t) \cos xu \cos ut\, du\, dt,$$

$$0 < b < x < \beta.$$

Für die Grenzen ist

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{b}^{\beta} F(t) \cos bu \cos ut\, du\, dt = \tfrac{1}{2} F(b), \quad \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{b}^{\beta} F(t) \cos \beta u \cos ut\, du\, dt = \tfrac{1}{2} F(\beta);$$

ist $0 < x < b$, oder $b < x$, so ist

$$\int_{0}^{\infty}\int_{b}^{\beta} F(t) \cos xu \cos ut\, dt\, du = 0.$$

17. Nimmt man $F(x)$ willkürlich für das Gebiet 0 bis ∞, setzt aber die Function für negative x so fort, dass $F(-x) = -F(x)$, so hat man

$$\int_{-\infty}^{0} F(t) \cos ut\, dt = -\int_{0}^{\infty} F(t) \cos ut\, dt, \quad \int_{-\infty}^{0} F(t) \sin ut\, dt = \int_{0}^{\infty} F(t) \sin ut\, dt,$$

und daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cos ut\, dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \sin ut\, dt = 2\int_{0}^{\infty} F(t) \sin ut\, dt.$$

Die Gleichung No. 16, 1. ergiebt daher

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} F(t) \sin xu \sin ut\, du\, dt, \quad 0 < x < \infty.$$

Da das Produkt $\sin xu \sin ut$ für entgegengesetzt gleiche u gleiche Werthe hat, so hat man einfacher

1. $$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} F(t) \sin xu \sin ut\, du\, dt,$$

$$0 < x < \infty.$$

Hierbei gelten für den Fall, dass $F(x)$ Discontinuitäten hat, die bereits wiederholt gemachten Bemerkungen.

Nimmt man $F(x) = 0$ von $x = 0$ bis $x = b$, willkürlich von b bis β, und Null von β bis ∞, so erhält man

2. $$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_b^\beta F(t)\sin xu \sin ut\,du\,dt,$$
$$0 < b < x < \beta.$$

Ferner ist
$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_b^\beta F(t)\sin bu \sin ut\,du\,dt = \tfrac{1}{2}F(b), \quad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_b^\beta F(t)\sin\beta u \sin ut\,du\,dt = \tfrac{1}{2}F(\beta),$$
und für $0 < x < b$ oder $\beta < x$
$$\int_0^\infty\int_b^\beta F(t)\sin xu \sin ut\,dt\,du = 0.$$

18. Die Fourier'schen Doppelintegrale sind eine sehr ergiebige Quelle zur Berechnung von einfachen bestimmten Integralen. Ist man im Stande, bei den Doppelintegralen in No. 15, 16 und 17 die Integrale auszuführen
$$\int F(t)\cos u(t-x)\,dt, \quad \int F(t)\cos ut\,dt, \quad \int F(t)\sin ut\,dt,$$
so hat man dann ohne Weiteres den Werth der Doppelintegrale selbst.

A. Nimmt man in No. 16, 3. $b = 0$, und $F(x) = 1$, so erhält man
$$\int_0^\infty \frac{\cos xu \sin\beta u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqq x < \beta,$$
$$\int_0^\infty \frac{\cos xu \sin\beta u}{u}\,du = 0, \quad \beta < x.$$

B. Setzt man in No. 16, 3. $b = 0$, und $F(x) = x$ und bemerkt, dass
$$\int_0^\beta t\cos ut\,dt = \left[\frac{t\sin ut}{u} + \frac{\cos ut}{u^2}\right]_0^\beta = \frac{\beta\sin u\beta}{u} + \frac{\cos u\beta - 1}{u^2},$$
$$= \frac{\beta\sin u\beta}{u} - 2\cdot\frac{\sin^2\frac{1}{2}u\beta}{u^2},$$
so erhält man
$$x = \frac{2\beta}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xu\,\sin\beta u}{u}\,du - \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xu\,\sin^2\frac{1}{2}\beta u}{u^2}.$$

Setzt man für das erste Integral den soeben gefundenen Werth und vertauscht noch β mit 2β, so erhält man schliesslich
$$\int_0^\infty \frac{\cos xu \sin^2\beta u}{u^2}\,du = \frac{\pi}{4}(2\beta - x)$$
$$0 \leqq x \leqq 2\beta.$$

C. Durch theilweise Integration findet man

$$\int_0^\infty e^{-t}\cos ut\,dt = \left[\frac{e^{-t}\sin ut}{u}\right]_0^\infty + \frac{1}{u}\int_0^\infty e^{-t}\sin ut\,dt,$$
$$\int_0^\infty e^{-t}\sin ut\,dt = -\left[\frac{e^{-t}\cos ut}{u}\right]_0^\infty - \frac{1}{u}\int_0^\infty e^{-t}\cos ut\,dt.$$

Hieraus ergiebt sich leicht
$$\int_0^\infty e^{-t}\cos ut\,dt = \frac{1}{1+u^2}, \quad \int_0^\infty e^{-t}\sin ut\,dt = \frac{u}{1+u^2}.$$

Daher gewinnt man aus No. 16, 2 und No. 17, 2 die Integrale
$$\int_0^\infty \frac{\cos xu}{1+u^2}\,du = \frac{\pi}{2}e^{-x}, \quad x \geqq 0.$$
$$\int_0^\infty \frac{u\sin xu}{1+u^2}\,du = \frac{\pi}{2}e^{-x}, \quad x > 0.$$

Ersetzt man hier u durch $\frac{u}{\alpha}$ und x durch αx so erhält man die Integrale
$$\int_0^\infty \frac{\cos xu}{\alpha^2+u^2}\,du = \frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha x}, \quad \alpha > 0, \quad x \geqq 0,$$
$$\int_0^\infty \frac{u\sin xu}{\alpha^2+u^2}\,du = \frac{\pi}{2}e^{-\alpha x}, \quad \alpha > 0, \quad x > 0.$$

Bemerkung. Die auf pag. 673 gegebene Herleitung des Resultates 3. stimmt im Wesentlichen mit Fourier's Deduction überein; sie gestattet aber einige Zweifel und bedarf daher einer genaueren Untersuchung, bezüglich deren wir auf Schloemilch's »Compendium der höheren Analysis«, Bd. II, verweisen.

II. Theil. Functionen einer complexen Variabeln.

§ 12. Algebraische Functionen einer complexen Variabeln.

1. Durch Vereinigung einer realen Zahl a mit einer imaginären bi entsteht die complexe Zahl $a + bi$.

Alle zu dem realen Bestandtheile a gehörigen complexen Zahlen werden erhalten, wenn b die reale Zahlenreihe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft; hieraus entstehen weiter alle complexen Zahlen überhaupt, wenn a die ganze reale Zahlenreihe durchläuft. Bezeichnet ∞ die Menge der realen Zahlen, so ist die der complexen ∞^2. Zur geometrischen Darstellung bedürfen daher die complexen Zahlen eines Gebietes zweier Dimensionen, einer Fläche. Wählt man hierzu die Ebene, so hat man sich zunächst darüber schlüssig zu machen, wie die positive und negative imaginäre Einheit darzustellen sind, und wie man den geometrischen Begriff der Summe*) auf die Summe einer realen und imaginären Zahl auszudehnen hat.

Die imaginäre Einheit i wird man als eine Strecke darstellen von derselben Länge, wie die reale Einheit, nur von anderer Richtung. Beachtet man nun, dass $1 \cdot i = i$, $i \cdot i = -1$, dass also die negative reale Einheit aus der positiven imaginären durch dieselbe arithmetische Operation hervorgeht, wie die positive imaginäre aus der positiven realen, und dass bei einer geschickt gewählten geometrischen Darstellung gleichen arithmetischen Operationen auch in bestimmter Hinsicht gleiche geometrische entsprechen müssen, so entsteht nun die Forderung, die Richtung der imaginären Einheit so zu wählen, dass der Winkel zwischen $+1$ und $+i$ gleich dem Winkel zwischen $+i$ und -1 ist, also so, dass sie mit der positiven realen Einheit einen rechten Winkel bildet.

Die positive imaginäre Zahl bi wird durch die Strecke OQ dargestellt, die der Strecke b gleich und mit der imaginären Einheit OJ gleichgerichtet ist; ferner die negative imaginäre Zahl $-bi$ durch eine Strecke, die der Strecke bi entgegengesetzt gleich ist. Die Gerade OX (Fig. 536) wird als die reale, OY als die imaginäre Achse bezeichnet.

2. Den geometrischen Begriff der Summe dehnen wir auf reale und imaginäre Summanden aus, und bezeichnen mit der Summe $a + bi$ die Strecke OB, welche erhalten wird, wenn man OA gleich und gleichgerichtet mit a, und

*) Um zwei (reale) Zahlen zu addiren, die durch die vom Nullpunkte O ausgehenden (auf der realen Achse enthaltenen) Strecken OA und OB dargestellt sind, construire man die Strecke AC, welche der Richtung und Länge nach mit OB übereinstimmt; alsdann ist

$$OA + OB = OC.$$

Diese Definition umfasst zunächst die Addition realer positiver und negativer Zahlen. Lässt man die eingeklammerten Beschränkungen weg, so wird sie für das ganze complexe Zahlengebiet verwendbar.

AB gleich und gleichgerichtet mit bi macht. Demnach sind die Strecken OA_1, OA_2, OA_3, OA_4 der Reihe nach die Repräsentanten der complexen Zahlen

$$5 + 3i, \quad -5 + 3i, \quad -5 - 3i, \quad 5 - 3i,$$

und die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 werden als die Zahlpunkte $\pm 5 \pm 3i$ bezeichnet.

Ist P' die Projection von P auf OX und ist $OP' = x$, $P'P = y$, so ist P der Zahlpunkt

$$x + yi.$$

Ferner ist

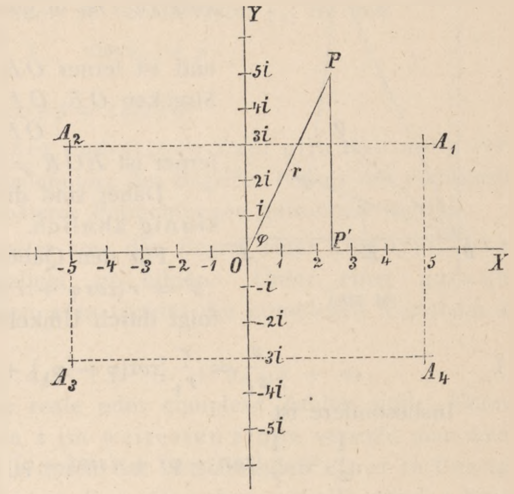
$$OP = r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

wobei wir die Wurzel positiv rechnen wollen; wird XOP mit φ bezeichnet, so ist

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r},$$

$$x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Die Grössen r und φ werden als Modul und Amplitude der complexen Zahl $x + iy$ bezeichnet.



(M. 536.)

Die complexen Zahlen

$$\cos\varphi + i\sin\varphi,$$

deren Modul gleich der Einheit ist, bezeichnet man als complexe Einheiten; die Einheitspunkte liegen auf einem Kreise, der um den Nullpunkt mit der Längeneinheit als Halbmesser beschrieben ist. Zahlen $a + ib$, für welche a und b dasselbe Verhältniss haben, besitzen dieselbe Amplitude oder um π verschiedene Amplituden; sie liegen daher auf derselben durch den Nullpunkt gehenden Geraden.

3. Die geometrischen Definitionen der Summe und Differenz übertragen wir nun auch auf complexe Zahlen. Ist PR gleich OQ und gleichgerichtet, so setzen wir

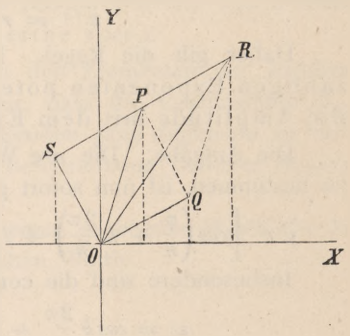
$$OR = OP + OQ;$$

und ist PS gleich OQ, aber von entgegengesetzter Richtung, so ist

$$OS = OP - OQ.$$

Werden durch die Punkte P und Q die Zahlen $a + bi$, $c + di$ repräsentirt, so ist daher

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$
$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$



(M. 537.)

4. Dem Principe der Continuität der Rechenregeln folgend, wird das Produkt complexer Zahlen durch die Gleichung definirt

$$(a + bi)\cdot(c + di) = ac + bc\cdot i + ad\cdot i + bd\cdot i\cdot i = ac - bd + (bc + ad)i.$$

Ist $a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\quad c + di = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$,
so ist der Modul R des Produkts

$$R = \sqrt{(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2} = \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2}$$
$$= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = r\cdot r_1.$$

Für die Amplitude Φ des Produkts hat man

$$\cos\Phi = \frac{ab - cd}{R} = \frac{a}{r}\cdot\frac{b}{r_1} - \frac{c}{r}\cdot\frac{d}{r_1} = \cos(\varphi + \varphi_1),$$

$$\sin\Phi = \frac{ac+bd}{R} = \frac{a}{r}\cdot\frac{c}{r_1} + \frac{b}{r}\cdot\frac{d}{r_1} = \sin(\varphi+\varphi_1).$$

Daher folgt: Complexe Zahlen werden multiplicirt, indem man ihre Moduln multiplicirt und die Amplituden addirt. Ist in complexen Zahlen

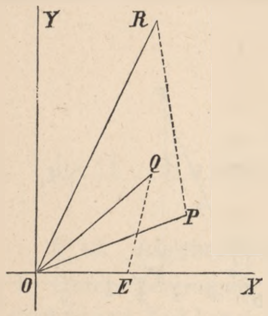
$$OR = OP\cdot OQ,$$

und ist ferner $OE = 1$, so besteht zwischen den vier Strecken OE, OP, OQ und OR die Proportion

$$OE : OQ = OP : OR;$$

ferner ist $EOR = EOP + EOQ$, also $POR = EOQ$.

Daher sind die Dreiecke EOQ und POR gleichsinnig ähnlich.



(M. 538.)

Für den Quotienten zweier complexen Zahlen

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\quad z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

folgt durch Umkehrung der Multiplication

1. $$\frac{z}{z_1} = \frac{r}{r_1}[\cos(\varphi-\varphi_1) + i\sin(\varphi-\varphi_1)].$$

Insbesondere ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)] = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

5. Haben die complexen Zahlen $z_1, z_2, z_3, \ldots z_n$ die Moduln $r_1, r_2, r_3 \ldots r_n$ und die Amplituden $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_n$, so ist nach 3.

$$z_1z_2z_3\ldots z_n = r_1r_2r_3\ldots r_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)].$$

Ist insbesondere $z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = z_n$, so ergiebt sich

1. $$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Aus

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)]$$

folgt

$$z^{-n} = r^{-n}[\cos(-n\varphi)+i\sin(-n\varphi)].$$

Daher gilt die Regel: Eine complexe Zahl wird mit einem ganzzahligen Exponenten potenzirt, indem man den Modul potenzirt und die Amplitude mit dem Exponenten multiplicirt.

Die Aufgabe: Die $n$te Wurzel einer complexen Zahl $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ zu bestimmen, ist nun sofort gelöst; die n verschiedenen Lösungen sind

$$\sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right],\quad k = 0, 1, 2\ldots(n-1).$$

Insbesondere sind die complexen $n$ten Wurzeln der positiven realen Einheit

$$\varepsilon_k = \cos k\frac{2\pi}{n} + i\sin k\frac{2\pi}{n},\quad k=0, 1, 2\ldots(n-1).$$

Die complexen $n$ten Wurzeln von z können dargestellt werden, indem man die Wurzel

$$\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right),\quad \varphi < 2\pi$$

mit den complexen $n$ten Wurzeln der Einheit der Reihe nach multiplicirt. Ferner folgt noch, dass die oben gegebene Regel für die Potenz einer complexen Zahl auch für gebrochene Exponenten gilt.

Ein irrationaler Exponent p ist Grenzwerth einer Reihe von rationalen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ und man hat

$$p = \alpha_n + \rho_n,$$

wobei ρ_n sich der Grenze Null nähert, wenn n unendlich wächst.

Wendet man die Regel $z^{\alpha+\rho} = z^\alpha\cdot z^\rho$ auch auf ein irrationales ρ an, so ist

$$z^p = r^{\alpha_n}(\cos\alpha_n\varphi + i\sin\alpha_n\varphi)\cdot z^{\rho_n}.$$

Geht man zur Grenze $n=\infty$ über, so verschwindet ρ_n; da nun

$$\lim z^{\rho_n} = 1,\quad \lim\alpha_n = p,$$

so folgt

$$z^p = r^p(\cos p\varphi + i\sin p\varphi).$$

Die Regel für die Potenz einer complexen Zahl gilt also auch für irrationale Exponenten. Die Ausdehnung des Begriffes Potenz auf complexe Exponenten wird erst im Verlaufe späterer Betrachtungen gewonnen werden.

6. Das bisher Mitgetheilte gestattet uns, den Begriff einer algebraischen Function einer complexen Variabeln zu bilden. Unter einer ganzen rationalen algebraischen Function $n$ten Grades der complexen Variabeln z versteht man die Grösse

$$s = a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \ldots + a_{n-1}z + a_n,$$

wobei $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$ gegebene reale oder complexe Zahlen sind. Unter einer algebraischen Function von z im weitesten Sinne versteht man eine Grösse s, deren Zusammenhang mit z durch das Verschwinden einer in Bezug auf s und z ganzen und rationalen Function hergestellt wird. Eine algebraische Function wird also durch eine Gleichung von der Form definirt

$$\varphi(s, z) = A_0s^n + A_1s^{n-1} + A_2s^{n-2} + \ldots + A_{n-1}s + A_n = 0,$$

wo $A_0, A_1 \ldots A_n$ ganze rationale Functionen der Variabeln z sind. Man sieht hieraus sofort: Ist s eine algebraische Function von z, so ist auch z eine algebraische Function von s.

7. Ist die Gleichung

$$\varphi(s, z) = 0$$

in Bezug auf s vom Grade n, so gehören zu jedem Werthe von z n im Allgemeinen von einander verschiedene Werthe von s.

Dieser algebraische Fundamentalsatz wird in den Elementen der Algebra gewöhnlich nur unter der Voraussetzung bewiesen, dass die Coefficienten A_0, $A_1 \ldots A_n$ reale Zahlen sind; da wir ihn im Folgenden ganz allgemein zu verwenden haben, so mag ein von der genannten Beschränkung befreiter Beweis hier statt haben.

Man denke sich für z in die Function $\varphi(s, z)$ einen gegebenen Werth $a+bi$ eingesetzt. Setzt man nun für s einen veränderlichen Werth

$$s = \xi + \eta i,$$

so erhält man

$$\varphi(s) = M + Ni;$$

hierbei sind M und N Functionen von ξ und η. Das Quadrat des Modul von $\varphi(s)$, M^2+N^2, kann nicht negativ werden, muss also für einen oder mehr als einen Werth von s einen Minimalwerth erhalten, der Null oder positiv ist; die diesem Minimalwerthe zugehörigen Werthe von M, N, ξ und η seien M_0, N_0, ξ_0, η_0. Es sei nun ρ eine Wurzel einer Einheit, und ω eine reale Zahl; man ersetze in $\varphi(s)$ die Zahl s durch $\xi_0 + i\eta_0 + \rho\omega$ und erhalte dadurch

$$\varphi(\xi_0 + i\eta_0 + \rho\omega) = P + Qi.$$

Dieser Ausdruck ist in Bezug auf $\rho\omega$ eine ganze Function $n$ten Grades; er enthält in jedem Falle das Glied $\rho^n\omega^n$; ob auch die Glieder mit $\rho\omega$, $\rho^2\omega^2$, $\rho^3\omega^3 \ldots$

$\rho^{n-1}\omega^{n-1}$ vollzählig vorhanden sind, hängt von besonderen Umständen ab; es können im gegebenen Falle sehr wohl einige davon, — oder auch alle — fehlen. Gesetzt nun, es sei $\rho^k\omega^k$ die niedrigste Potenz von $\rho\omega$, welche in dieser Entwicklung vorkommt, so erhält man für $\rho\,(\xi_0 + \eta_0 i + \rho\omega)$ einen Ausdruck von der Form

$$M_0+N_0 i+(M_k+N_k i)(\rho\omega)^k+(M_{k+1}+N_{k+1}i)(\rho\omega)^{k+1} + \ldots . + (M_n+N_n i)(\rho\omega)^n .$$

Den Anfang macht $M_0 + N_0 i$, da $\varphi\,(s)$ nach der Voraussetzung diesen Werth annimmt, wenn man $\omega = 0$ setzt.

Wir setzen nun zunächst $\rho^k = \varepsilon$, wobei wir unter ε eine reale Einheit verstehen wollen, und dann $\rho^k = \varepsilon i$. Diese Substitutionen liefern die Resultate

$$M_0 + \varepsilon M_k\omega^k + \ldots + i(N_0 + \varepsilon N_k\omega^k + \ldots),$$

bez.

$$M_0 - \varepsilon N_k\omega^k + \ldots + i(N_0 + \varepsilon M_k\omega^k + \ldots),$$

wobei die nur angedeuteten Glieder Potenzen von ω enthalten, deren Exponenten grösser als k sind. Die Quadrate der Moduln dieser beiden complexen Grössen sind, nach Potenzen von ω geordnet.

$$M_0^2 + N_0^2 + 2\varepsilon(M_0 M_k + N_0 N_k)\omega^k + \ldots$$

bez.

$$M_0^2 + N_0^2 + 2\varepsilon(N_0 M_k - M_0 N_k)\omega^k + \ldots$$

Man wähle nun ε in jeder der beiden Entwicklungen so, dass die mit ω^k multiplicirten Glieder negativ ausfallen. Angenommen, die beiden Binome

$$M_0 M_k + N_0 N_k \text{ und } N_0 M_k - M_0 N_k$$

wären von Null verschieden, so könnte man die reale Zahl ω immer so klein wählen, dass die Polynome

$$2\varepsilon(M_0 M_k + N_0 N_k)\,\omega^k + \ldots \text{ und } 2\varepsilon(N_0 M_k - M_0 N_k)\,\omega^k + \ldots$$

dieselben Vorzeichen haben, wie ihre ersten Glieder

$$2\varepsilon(M_0 M_k + N_0 N_k)\,\omega^k \quad \text{bez.} \quad 2\varepsilon(N_0 M_k - M_0 N_k)\,\omega^k,$$

also negativ sind. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, dass

$$M_0^2 + N_0^2$$

der kleinstmögliche Werth des Quadrats des Modul von $\varphi(s)$ ist. Folglich können $M_0 M_k + N_0 N_k$ und $M_0 N_k - N_0 M_k$ nicht von Null verschieden sein. Aus

$$M_0 M_k + N_0 N_k = 0, \quad M_0 N_k - N_0 M_k = 0$$

folgt

$$(M_0 M_k + N_0 N_k)^2 + (M_0 N_k - N_0 M_k)^2 = (M_0^2 + N_0^2)\cdot(M_k^2 + N_k^2) = 0 .$$

Da nun nach der Voraussetzung $M_k^2 + N_k^2$ von Null verschieden ist, so folgt schliesslich

$$M_0^2 + N_0^2 = 0 .$$

Es giebt daher wenigstens einen Werth von s, für welchen der Modul von $\varphi(s)$, d. i. $\varphi(s)$ selbst verschwindet.

Sei σ_1 eine Wurzel der Gleichung

$$\varphi(s) = 0;$$

bildet man die Identität

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= \varphi(s) - \varphi(\sigma_1)\\ &= A_1(s^n - \sigma_1{}^n) + A_2(s^{n-1} - \sigma_1{}^{n-1}) + \ldots + A_{n-1}(s - \sigma_1),\end{aligned}$$

so erkennt man, dass $\varphi(s)$ durch die Differenz $s - \sigma_1$ ohne Rest theilbar ist; man hat daher

$$\varphi(s) = (s - \sigma_1)\,(B_0 s^{n-1} + B_1 s^{n-2} + B_2 s^{n-3} + \ldots + B_{n-1}),$$

worin $B_0, B_1, \ldots B_{n-1}$ aus $A_0, A_1, \ldots A_n$ und σ_1 zusammengesetzt sind. Jede ganze Function $n$ten Grades von s lässt sich also in das Produkt einer linearen Function und einer ganzen Function $(n-1)$ten Grades zerfällen. Zerfällt man unter Anwendung dieses Satzes die ganze Function

$$B_0 s^{n-1} + B_1 s^{n-2} + B_2 s^{n-3} + \ldots + B_{n-1}$$

u. s. f., so erhält man: Jede ganze algebraische Function $n$ten Grades einer Variabeln ist das Produkt von n linearen Functionen.

Der soeben gegebene Satz ist von dem folgenden nicht verschieden: Jede Gleichung $n$ten Grades mit einer Unbekannten hat n Wurzeln, von denen mehrere zusammenfallen können.

Aus der Zerlegung der Function $n$ten Grades $\varphi(s)$ in n lineare Faktoren erkennt man zugleich, dass die Gleichung $\varphi(s) = 0$ nicht mehr als n reale oder complexen Wurzeln haben kann.

Wenn eine Gleichung $n$ten Grades nur reale Coefficienten hat und eine complexe Wurzel zulässt, so hat sie bekanntlich auch die conjugirt complexe Wurzel. Dieser Satz gilt für Gleichungen mit complexen Coefficienten nicht. Man übersieht dies sofort, wenn man in der Gleichung $n$ten Grades

$$(s - a)\,(s - b)\;\ldots .\;(s - n) = 0$$

für die n Grössen $a, b, c \ldots n$ beliebig gewählte reale oder complexe Zahlen setzt; denn man erhält dann eine Gleichung $n$ten Grades für s, deren complexe Wurzeln in keiner Weise von einander abhängig sind.

8. Wir schliessen hieran eine Bemerkung über die Zerlegung einer echt gebrochenen Function in Partialbrüche.

In § 3, No. 2 ist die Zerlegung einer echt gebrochenen realen Function gezeigt worden, unter der Voraussetzung, dass der Nenner keine mehrfachen Faktoren hat. Das dort gewonnene Resultat

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_1}{x - \xi_1} + \frac{A_2}{x - \xi_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - \xi_n}, \qquad A_k = \frac{\psi(\xi_k)}{\varphi'(\xi_k)},$$

lässt sich ohne Weiteres auf den Fall complexer Functionen $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ ausdehnen. Dasselbe gilt von der Zerlegungsmethode § 3, No. 3, für den Fall, dass $\varphi(x)$ mehrfache Faktoren hat.

Die in § 3, No. 4 gegebene Methode für den Fall mehrfacher complexer Wurzeln hat bei complexen Functionen $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ keine Anwendung; es bewendet hier bei der in No. 3 gegebenen Zerlegung.

9. Alle weiteren Functionen, die wir betrachten, werden in bestimmter Weise aus algebraischen Functionen abgeleitet. Einige auf Functionen einer complexen Variabeln bezügliche Sätze, die wir nun mittheilen wollen, gelten für alle diese Functionen unabhängig von ihrer besonderen Natur.

10. Bevor wir zu diesen Sätzen übergehen, muss noch eine andere wichtige Frage erledigt werden.

Die geometrische Darstellung einer realen Function $f(x)$ einer realen Variabeln x erfolgt, indem man x als Abscisse und $f(x)$ als Ordinate am einfachsten in einem rechtwinkeligen Coordinatensysteme betrachtet; die Curve $y = f(x)$ giebt dann ein anschauliches, viele Untersuchungen wesentlich erleichterndes Bild des Functionsverlaufs. Eine dem entsprechende Darstellung complexer Functionen einer complexen Variabeln ist offenbar nicht möglich; denn die complexe Variable ist nicht auf einer Geraden, sondern nur auf einem Gebiete zweier Dimensionen darstellbar, und eine Function derselben ist im Allgemeinen wieder complex (nur für einzelne Werthe real oder rein imaginär), also wieder von zwei Dimensionen. Um den Zusammenhang einer complexen Function mit der Variabeln anschaulich zu machen, hat man folgenden Weg eingeschlagen.

Man verwendet zwei Ebenen, eine Variabelnebene und eine Functionsebene. Die Punkte der ersteren stellen die Werthe der Variabeln dar;

durchläuft die Variable z eine Reihe von complexen Werthen, so durchläuft der zugehörige Punkt der Variabelnebene, den wir der Einfachheit wegen auch mit z bezeichnen wollen, eine gewisse Curve. Zu jedem Werthe der Variabeln z gehört ein oder gehören einige bestimmte Werthe der Function $w = f(z)$. Den Zahlpunkt w, bez. die Gruppe von Zahlpunkten w suche man nun auf der Functionsebene auf; man erhält so einen Functionspunkt, oder eine Gruppe von Functionspunkten, die wir als dem variabeln Punkte z entsprechend bezeichnen. Bewegt sich nun z auf der Variabelnebene, so bewegen sich die entsprechenden Functionspunkte auf der Functionsebene; während aber die Bewegung von z ganz willkürlich ist, hängen die Wege der Functionspunkte von den Wegen von z und dem Functionszusammenhange $\varphi(z)$ ab.

Die Punkte der Variabelnebene und die Punkte der Functionsebene stehen somit in einer geometrischen Verwandtschaft.

Aus rein geometrischem Interesse haben wir einen einfachen Fall punktverwandter Ebenen schon kennen gelernt, die Collineation, und ihre besondern Fälle, die Affinität und die Aehnlichkeit. Die complexen Functionen geben zur Untersuchung mannigfaltiger Punktverwandtschaften Veranlassung; es wird sich beiläufig zeigen, dass die allgemeine Collineation unter diesen Verwandtschaftsarten sich nicht befindet, wohl aber die Affinität.

11. Wir geben hierzu zwei einfache Beispiele.

A. Ist

$$w = \frac{1}{z},$$

und sind x, y die Coordinaten des Punktes z in der Variabelnebene, u, v die Coordinaten von w in der Functionsebene, so ist

$$u + vi = \frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{x^2+y^2}.$$

Also ist

$$u = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$x = \frac{u}{u^2+v^2}, \quad y = -\frac{v}{u^2+v^2}.$$

Um eine Vorstellung von der Verwandtschaft der beiden Ebenen zu erhalten, wollen wir in der Functionsebene die Linien aufsuchen, die den Parallelen zur realen und imaginären Achse in der Variabelnebene entsprechen, d. i. die Curven, welche der Punkt w zurücklegt, wenn z die Parallelen zu den Achsen durchläuft. Für eine Parallele zur imaginären Achse ist x constant, y willkürlich; daher erfüllen u und v die Gleichung

1. $$\frac{u}{u^2+v^2} = x, \quad \text{oder} \quad u^2 + v^2 - \frac{1}{x}u = 0,$$

worin x eine gegebene Zahl ist.

Für eine Parallele zur Abscissenachse ist y constant; die Coordinaten der zugehörigen Functionspunkte erfüllen also die Gleichung

2. $$-\frac{v}{u^2+v^2} = y, \quad \text{oder} \quad u^2 + v^2 + \frac{1}{y}v = 0.$$

Die Curven 1. bilden ein Kreisbüschel, dessen Centrale die U-Achse ist und dessen Kreise die V-Achse berühren; die Curven 2. bilden ebenfalls ein Kreisbüschel, die Centrale ist die V-Achse und die Kreise berühren die U-Achse. Die Büschel sind orthogonal, d. h. jeder Kreis des einen wird von jedem des andern unter rechten Winkeln geschnitten.

Sind Modul und Amplitude von s und z die Grössen R, Φ, r, φ, so ist

$$R = \frac{1}{r}, \quad \Phi = -\varphi.$$

Einem constanten Werthe von r entspricht ein constanter von R, d. i.: Einem Kreise um den Nullpunkt in der Variabelnebene entspricht ein Kreis um den Nullpunkt in der Functionsebene; die Radien zweier entsprechenden Kreise sind reciprok. Einem Strahle durch den Nullpunkt in der variabeln Ebene entspricht ein Strahl durch den Nullpunkt in der Functionsebene; zwei entsprechende Strahlen bilden entgegengesetzt gleiche Winkel mit den realen Achsen.

B. Ist $w = z^2$, also $u + vi = x^2 - y^2 + 2xyi$, so ist

3. $$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

Durchläuft z eine Parallele zur Y-Achse, so ist x constant und y veränderlich. Die Gleichungen 3. ergeben die Gleichung der entsprechenden Curve der Functionsebene, wenn y aus beiden Gleichungen eliminirt wird. Man erhält

4. $$v^2 = 4x^2(x^2 - u).$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel; die Symmetrieachse derselben fällt in die u-Achse, der Brennpunkt in den Nullpunkt, der Parameter ist $2x^2$, und die Parabel erstreckt sich entlang der negativen Seite der u-Achse.

Einer Parallelen zur realen Achse der Variabelnebene entspricht in der Functionsebene eine Curve, deren Gleichung aus 3. erhalten wird, wenn man y constant annimmt und die Variable x eliminirt; es ergiebt sich

5. $$v^2 = 4y^2(y^2 + u).$$

Dies ist eine Parabel, deren Achse ebenfalls mit der u-Achse, deren Brennpunkt mit dem Nullpunkte zusammenfällt; der Parameter ist $2y^2$; die Parabel erstreckt sich in der Richtung der positiven u-Achse.

Die Parabelschaaren 4. und 5. sind confocal; jede Parabel der einen Schaar wird von jeder der andern Schaar unter rechten Winkeln geschnitten.

Modul und Amplitude von s hängen jetzt mit dem Modul und der Amplitude der Variabeln durch die Gleichungen zusammen

$$R = r^2, \quad \Phi = 2\varphi.$$

Einem Kreise um den Nullpunkt in der z-Ebene entspricht also ein Kreis um den Nullpunkt in der w-Ebene; einem Strahle durch den Nullpunkt in der z-Ebene entspricht ein Strahl durch den Nullpunkt der w-Ebene; der Winkel, den letzterer mit der ξ-Achse bildet, ist doppelt so gross als der Winkel des entsprechenden Strahls mit der x-Achse.

12. Jede Function von $z = x + iy$ kann man auf die Form bringen

$$w = \varphi(z) = u + vi,$$

wobei u und v reale Functionen von x und y sind. Aber nicht jeder Ausdruck $u + vi$, worin u und v Functionen x und y sind, ist eine Function der complexen Variabeln $z = x + yi$. Man hat nämlich

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dw}{dz}$$

und

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dw}{dz} i,$$

mithin ist

1. $$\frac{\partial w}{\partial y} = i \frac{\partial w}{\partial x},$$

d. i.

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} = i \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Vergleicht man beiderseits die realen und imaginären Bestandtheile, so erhält man die Gleichungen

2. $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Diese Gleichungen sind also erfüllt, wenn $u + vi$ eine Function der complexen Variabeln z ist.

Es lässt sich leicht umgekehrt zeigen, dass jeder Ausdruck $u + vi$, welcher der Gleichung 1. genügt, eine Function von z ist.

Gesetzt, $w = u + vi$ erfüllt die Gleichung
$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Man ersetze x in w durch $z - yi$; das Ergebniss dieser Substitution werde mit (w) bezeichnet. Alsdann ist
$$\frac{\partial (w)}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y}.$$

Aus $x = z - yi$ folgt $\partial x : \partial y = -i$; daher erhält man
$$\frac{\partial (w)}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} - i\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Da nun 1. erfüllt ist, so hat man
$$\frac{\partial (w)}{\partial y} = 0.$$

Folglich ist (w) von y unabhängig, mithin eine Function von z, d. i. von $x + yi$. Wir schliessen daher: Die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass der complexe x und y enthaltende Ausdruck $w = u + iv$ eine Function von $z = x + yi$ ist, wird durch die Gleichung ausgesprochen
$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x}.$$

13. Ist w eine Function von z, und W eine Function von w, so ist W eine Function von z.

Da W nach der Voraussetzung nur von w abhängt, so ist

1. $$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{dW}{dw} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{dW}{dy} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Da ferner nach der Voraussetzung w eine Function von z ist, so ist
$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x};$$
führt man dies in 1. ein, so erhält man
$$\frac{\partial W}{\partial y} = i\frac{\partial W}{\partial x}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

14. Ist w eine Function von z, so ist umgekehrt auch z eine Function von w.

Das vollständige Differential von w ist

1. $$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy.$$

Da nun $\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x}$, so erhält man aus 1.
$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}(dx + idy) = \frac{\partial w}{\partial x}dz.$$

Daher ist

2. $$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = i\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Hieraus folgt
$$dz = \frac{1}{\frac{\partial w}{\partial x}}dw = \frac{1}{\frac{\partial w}{\partial x}}(du + idv).$$

Mithin hat man für die partialen Differentialquotienten von z nach u und v
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{\frac{\partial w}{\partial x}}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = i\frac{1}{\frac{\partial w}{\partial x}},$$
daher ist
$$\frac{\partial z}{\partial v} = i\frac{\partial z}{\partial u}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

15. Aus der Gleichung No. 14, 2. folgt der wichtige Satz, dass der Differentialquotient einer Function einer complexen Variabeln nicht von dem Verhältnisse abhängt, in welchem sich x und y ändern, denn $\frac{\partial w}{\partial x}$ enthält nur die Variabeln x und y, nicht aber das Verhältniss $dy : dx$.

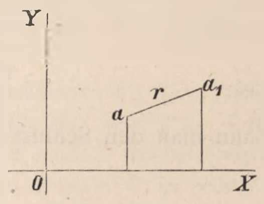
Soll z eine verschwindend kleine Aenderung erfahren, so kann dies auf unendliche vielfache Weise geschehen, denn man kann den Punkt z nach allen möglichen Richtungen hin in der Functionsebene eine verschwindend kleine Verschiebung ertheilen. Zu jeder solchen unendlich kleinen Verschiebung dz von z gehört eine bestimmte, unendlich kleine Verschiebung dw des entsprechenden Punktes w in der Functionsebene; das Verhältniss $dw : dz$ ist aber von der Richtung der Verschiebung von z unabhängig.

16. Der Differentialquotient von w ist eine Function von z, denn es ist
$$\frac{\partial w'}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{dw}{dz} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$
$$\frac{\partial w'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{dw}{dz} = i\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Daher hat man
$$\frac{\partial w'}{\partial x} = i\frac{\partial w'}{\partial x}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Man schliesst nun sofort weiter, dass auch alle höhern Differentialquotienten von w Functionen von z sind.

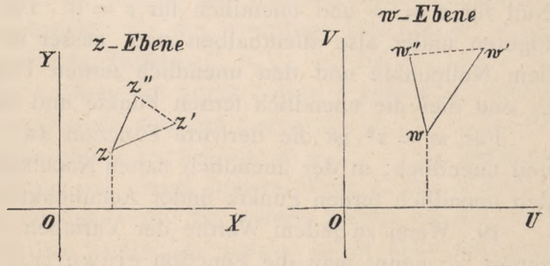
17. Setzt man
$$a = \alpha + \beta i \quad \text{und} \quad a_1 = \alpha_1 + \beta_1 i,$$
so ist
$$a_1 - a = \alpha_1 - \alpha + (\beta_1 - \beta)i.$$



(M. 539.)

Der Modul der Differenz ist daher gleich dem Abstande r der Zahlpunkte a und a_1 und die Amplitude ist gleich der Winkel φ dieser Strecke mit der positiven realen Achse; man hat daher
$$a_1 = a + r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Wir ertheilen nun der Variabeln z zwei verschiedene verschwindend kleine Verschiebungen, durch welche sie nach z' und z'' gelange; durch die entsprechenden Verschiebungen komme die Function von w nach w' und w''. Bezeichnet man die verschwindend kleinen Moduln der Differenzen $z' - z$,



(M. 540.)

$z'' - z$, $w' - w$, $w'' - w$ der Reihe nach mit r', r'', ρ', ρ'', die Amplituden mit φ', φ'', ψ', ψ'', so ist

$$z' - z = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi'), \quad z'' - z = r''(\cos\varphi'' + i\sin\varphi''),$$
$$w' - w = \rho'(\cos\psi' + i\sin\psi'), \quad w'' - w = \rho''(\cos\psi'' + i\sin\psi'').$$

Da nun nach No. 14, 2 das Verhältniss einer unendlich kleinen Veränderung der Variabeln zu der zugehörigen Veränderung der Function von der Richtung, in der die Variable sich ändert, nicht abhängt, so ist

$$\frac{z' - z}{w' - w} = \frac{z'' - z}{w'' - w}, \quad \text{oder} \quad \frac{z' - z}{z'' - z} = \frac{w' - w}{w'' - w}.$$

Führt man hier die obigen Werthe ein, so ergiebt sich

$$\frac{r'}{r''}[\cos(\varphi' - \varphi'') + i\sin(\varphi' - \varphi'')] = \frac{\rho'}{\rho''}[\cos(\psi' - \psi'') + i\sin(\psi' - \psi'')].$$

Vergleicht man beiderseits das Reale und Imaginäre, so erhält man

$$r' : r'' = \rho' : \rho'', \quad \varphi' - \varphi'' = \psi' - \psi''.$$

Hieraus ergiebt sich, dass die verschwindend *kleinen Dreiecke* $zz'z''$ *und* $ww'w''$ *gleichsinnig ähnlich sind.*

Beschreibt die Variable um den Punkt z herum ein verschwindend kleines Polygon, so beschreibt die Function um den Punkt w herum ein entsprechendes Polygon; verbindet man die Ecken beider Polygone mit z bez. w, so zerfallen sie in lauter ähnliche Dreiecke und man erkennt, dass beide Polygone ähnlich sind. Man gewinnt so den Satz: *Die Verwandtschaft der Variabelnebene mit der Functionsebene ist eine solche, dass entsprechende unendliche kleine Figuren beider Ebenen einander ähnlich sind.* Insbesondere ergiebt sich hieraus, dass *zwei Curven der z-Ebene sich unter denselben Winkeln schneiden, wie die entsprechenden Curven der w-Ebene.*

18. Nur in einzelnen Punkten, für vereinzelte Werthe der Variabeln und der Function, erleiden diese Betrachtungen eine *Ausnahme*, nämlich in den Punkten z und w, für welche

$$\frac{dw}{dz} = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{dw}{dz} = \infty;$$

denn aus keinem der beiden Gleichungspaare

$$\frac{w' - w}{z' - z} = 0, \quad \frac{w'' - w}{z'' - z} = 0,$$

bez.

$$\frac{w' - w}{z' - z} = \infty, \quad \frac{w'' - w}{z'' - z} = \infty$$

kann man den Schluss ziehen

$$\frac{w' - w}{w'' - w} = \frac{z' - z}{z'' - z}.$$

Ist z. B. $w = 1 : z$, so hat man $dw : dz = -1 : z^2$; dieser Ausdruck wird Null für $z = \infty$ und unendlich für $z = 0$. Die Aehnlichkeit unendlich kleiner Figuren findet also allenthalben statt, ausser in den Punkten der w-Ebene, die dem Nullpunkte und den unendlich fernen Punkten der z-Ebene entsprechen, es sind dies die unendlich fernen Punkte und der Nullpuukt der w-Ebene.

Für $w = z^2$ ist die derivirte Function $dw : dz = 2z$, und wird mit z Null und unendlich; in der unendlich nahen Nachbarschaft der jetzt sich entsprechenden unendlich fernen Punkte findet Aehnlichkeit nicht statt.

19. Wenn zu jedem Werthe der Variabeln z nur *ein* Werth der Function w gehört, so nennt man die Function *einwerthig*; aus diesem Begriffe folgt, dass eine einwerthige Function Unterbrechungen der Stetigkeit nur an solchen

Punkten erleiden kann, in denen sie unendlich gross wird. Einwerthig sind alle rationalen Functionen. Die ganzen rationalen Functionen werden unendlich nur wenn $z = \infty$ ist; die echt gebrochenen

$$w = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

nur für solche Werthe von z, für welche der Nenner $\psi(z)$ verschwindet, die unecht gebrochenen ausserdem noch für $z = \infty$.

20. Gehören zu einem Werthe der Variabeln im Allgemeinen verschiedene Werthe von w, so heisst die Function *mehrwerthig*, und zwar zwei-, drei-, vierwerthig u. s. w., sobald zu einem z im Allgemeinen zwei, drei, vier u. s. w. verschiedene Werthe von w gehören. Mehrwerthig sind alle irrationalen Functionen; die durch die Gleichung $n$ten Grades für w

$$\varphi(w, z) = 0$$

definirte Function w ist $n$werthig.

Für einzelne Punkte a_1, a_2, . . . der zEbene können zwei oder mehrere Werthe einer $n$werthigen Function zusammenfallen; diese Punkte heissen die *Verzweigungspunkte der mehrwerthigen Function.*

Die Function

$$w = \sqrt{z - a}$$

ist zweiwerthig; für $z = a$ werden beide Werthe gleich Null, daher ist dieser Punkt ein Verzweigungspunkt. Die zweiwerthige Function

$$w = \sqrt{(z - a)(z - b)}$$

hat die Verzweigungspunkte a und b; die zweiwerthige

$$w = \sqrt{(z - a)(z - b)(z - c)(z - d)}$$

hat vier Verzweigungspunkte, a, b, c, d. Die sechswerthige

$$w = \sqrt[3]{z^2 + az + b} + \sqrt{z}$$

hat drei Verzweigungspunkte; einer ist der Nullpunkt, die andern beiden sind die Wurzeln der Gleichung

$$z^2 + az + b = 0;$$

für $z = 0$ fallen dreimal zwei Werthe von w zusammen, für die Wurzeln von $z^2 + az + b = 0$ zweimal drei Werthe.

21. Wir wollen nun die Variable von einem Anfangswerthe $z = a$ auf irgend einer Curve zu einem Endwerthe $z = b$ führen und die Wege beachten, welche die Function w in der w-Ebene dabei zurücklegt.

Ist w einwerthig, so gehört zu jedem Punkte der z-Ebene nur *ein* Punkt der w-Ebene, zu jeder Curve der z-Ebene nur *eine* Curve der w-Ebene. Entsprechen den Punkten a und b der z-Ebene die Punkte a' und b' der w-Ebene, und führt man z auf mehreren verschiedenen Curven von a nach b, so werden die zugehörigen Curven der w-Ebene alle in a' beginnen und b' endigen.

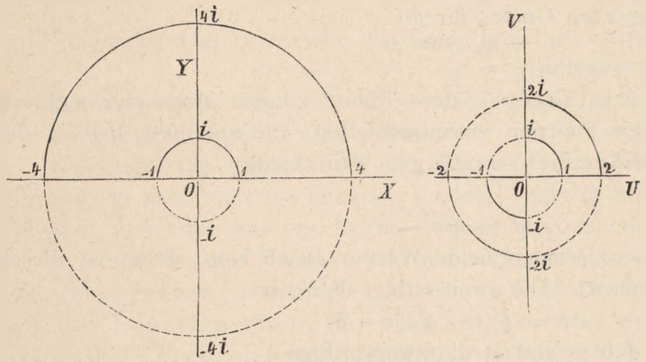
Ein wesentlich anderes Verhalten zeigen die mehrwerthigen Functionen. Sind a und b keine Verzweigungspunkte für die $n$werthige Function w, so gehören zu a und zu b je n verschiedene Punkte a_1', a_2', . . a_n' bez. b_1', b_2', . . b_n' der w-Ebene. Wird nun z von a entlang der Curve l nach b geführt, so rücken die zugehörigen n-Werthe der Function w von den Lagen a_1', a_2', . . a_n' in die Lagen b_1' b_2', . . b_n', es entstehen also n Curven, die in a_1', . . . a_n' beginnen und in b_1', . . . b_n' endigen; geht z auf einem andern Wege L von a nach b, so beschreibt das System der n Functionswerthe ein anderes System von n Curven, die dieselben Anfänge und dieselben Endpunkte haben, es ist aber sehr wohl möglich, dass die in einem bestimmten Punkte a_i' anfangende Curve bei der zweiten Ueberführung nach einem andern Punkte der Gruppe der b' geht, als bei der ersten. Achtet man nur auf den Werth w_i der Function, welcher für $z = a$ mit a_i' zusammenfällt, so wird derselbe sich stetig ändern, sowohl wenn z von a auf l nach b, als wenn z auf L geht, im ersten Falle würde alsdann w_i einen andern Endwerth als im letzteren erhalten.

Ein einfaches Beispiel wird dies erläutern.

22. Wir betrachten die Function

$$w = \sqrt{z}.$$

Wie wir schon gesehen haben (No. 11), gehört zu jedem durch den Nullpunkt gehenden Strahle der z-Ebene ein eben solcher der w-Ebene, und jedem um den Nullpunkt beschriebenen Kreise der z-Ebene entspricht ein Kreis der w-Ebene, der ebenfalls den Nullpunkt zum Centrum hat. Dem Punkte $z = 4$ entsprechen die Punkte $w_1 = 2$ und $w_2 = -2$. Wir führen nun z von 4 aus auf einem Halbkreise in positiver Drehrichtung um den Nullpunkt bis zum Punkte $z = -4$; alsdann geht w_1 auf einem Viertelkreise bis zu $2i$, und w_2 auf einem Viertelkreise bis zu $-2i$, beide in positiver Drehrichtung.



(M. 541.)

Hierauf gehe z von 4 bis -4 auf einem Halbkreise in negativer Drehrichtung. Die Amplituden von w_1 und w_2 ändern sich dann ebenfalls im Sinne der abnehmenden Winkel und es gelangt w_1 nach $-2i$, w_2 nach $2i$.

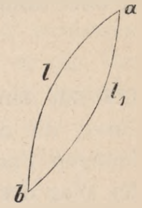
Je nachdem z also auf dem oberen oder dem unteren Halbkreise von $+4$ nach -4 geht, gelangt w_2 durch stetige Aenderungen von $+2$ nach $+2i$ oder $-2i$.

Führt man z in der Richtung der wachsenden Winkel entlang des ganzen Kreises von 4 bis zu 4 zurück, so geht w_1 in dem Halbkreise über $2i$ hinweg bis zu -2; einem geschlossenen Wege von z entspricht also ein nicht geschlossener von w_1. Geht z auf einem andern geeigneten Wege von 4 aus nach 4 zurück, so kann der zugehörige Weg von w_1 ein geschlossener sein. Dies ist z. B. der Fall, wenn z in positiver Drehrichtung den Halbkreis bis -4 zurücklegt, dann entlang der realen Achse bis -1 geht, hierauf in negativer Drehrichtung einen Halbkreis bis $+1$ beschreibt und dann auf der realen Achse nach $+4$ zurückkehrt. Denn dann geht w_1 in positiver Drehrichtung auf einem Viertelkreise bis $2i$, dann auf der imaginären Achse bis i, dann in negativer Drehrichtung in einem Viertelkreise bis $+1$, und endlich anf der realen Achse bis $+2$.

Gleichzeitig legt w_2 einen Viertelkreis bis $-2i$, dann die imaginäre Achse bis $-i$, dann einen Viertelkreis bis -1, und endlich die reale Achse bis -2 zurück.

Hätte man z den Halbkreis von -1 nach $+1$ in positiver Drehrichtung beschreiben lassen, so wären w_1 und w_2 von $+i$ und $-i$ auf Viertelkreisen um den Nullpunkt in positiver Drehrichtung weiter gegangen, und es wäre daher w_1 nach -2 und w_2 nach $+2$ gelangt, also nicht zu den Ausgangswerthen zurück.

23. Wird die Variable von a nach b entlang l_1 geführt und gelangt ein Functionswerth w_1 dabei von dem Anfangswerthe a' zu dem Endwerthe b', so kommt w_1 umgekehrt von b' nach a', wenn z den Weg l_1 rückwärts von b nach a durchläuft. Gesetzt nun, w_1 gelangt von a' nach b', gleichgültig ob z von a nach b die Wege l oder l_1 wählt. Lässt man dann z von a auf l bis b und dann auf l_1 zurück nach a gehen, so ändert sich w_1 von a' bis zu b' und nimmt am Schlusse wieder den Werth a' an; und umgekehrt: Gelangt w_1 vom Werthe a' aus wieder zu a' zurück, wenn z von a aus die Curven l und l_1 nach einander durchlaufend zu a zurückkehrt und hat w_1 dabei für $z = b$ den Werth b' angenommen, so gelangt w_1 rückwärts vom Werthe a' zum Werthe b', wenn z von a aus die Curve l_1 bis b durchläuft, w_1 nimmt also bei beiden Wegen l und l_1 der Variabeln denselben Endwerth an.



(M. 542.)

Um daher zu erfahren, welche Wege die Variable z von einem Anfangspunkte zu einem Zielpunkte zurücklegen muss, damit w_1 zu demselben oder zu verschiedenen Endwerthen gelange, genügt es, die geschlossenen Wege zu untersuchen.

Erhält w_1 denselben Werth wieder, wenn z auf der aus l und l_1 zusammengesetzten geschlossenen Curve von a ausgehend nach a zurückkehrt, so erhält auch w_1 denselben Werth, wenn z auf l oder auf l_1 von a nach b sich bewegt; und erhält w_1 nicht denselben Werth wieder, wenn z die geschlossene Curve durchläuft, so erhält w_1 einen andern Werth, wenn z von a nach b auf l_1, als wenn es auf l geht.

24. Um bei der irrationalen Function

$$w = \sqrt{z}$$

die geschlossenen Wege, welche die Variabele zurückzulegen hat, damit w_1 wieder zu seinem Ausgangswerthe zurückkehrt, von denen zu unterscheiden, für welche dies nicht der Fall ist, drückt man z durch Modulus und Amplitude aus. Der Modulus ist eine eindeutig bestimmte Zahl; die Amplitude dagegen ist unendlich vieldeutig; ist nämlich φ einer ihrer Werthe, so erhält man die anderen, wenn man φ um ganze Vielfache von 2π vermehrt oder vermindert.

Ist nun
$$z = r\,(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)$$
so ist
$$w = \sqrt{r}\cdot\left(cos\,\frac{\varphi}{2} + i\,sin\,\frac{\varphi}{2}\right)$$

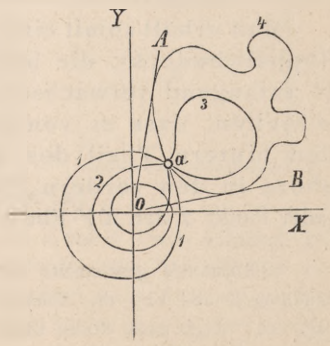
Zu jeder Amplitude gehört hiernach ein ganz bestimmter Werth von w; zu allen Amplituden, die um gerade Vielfache von 2π verschieden sind, gehört ein und derselbe Werth w_1 der zweideutigen Function w, zu den übrigen, die von den ersten um ungerade Vielfache von 2π abweichen, gehört der andere Werth w_2.

Geht nun z von einem Punkte a aus und auf einer beliebigen geschlossenen Curve (1) nach a so zurück, dass dabei die Amplitude um 2π zu- oder abgenommen hat, so hat z den Nullpunkt einmal umkreist, und w ist von dem Werthe

$$w_1 = \sqrt{r}\left(cos\,\frac{\varphi}{2} + i\,sin\,\frac{\varphi}{2}\right)$$

zu dem Werthe

$$\sqrt{r}\left(cos\,\frac{\varphi \pm 2\pi}{2} + i\,sin\,\frac{\varphi \pm 2\pi}{2}\right) = -\,w_1$$



(M. 543).

gelangt, also nicht zum Ausgangswerthe zurück. Läuft hingegen z auf einer geschlossenen Curve (2) so von a nach a zurück, dass die Amplitude um 4π zu oder abnimmt, so endigt w_1 mit dem Werthe

$$\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi \pm 4\pi}{2} + i\sin\frac{\varphi \pm 4\pi}{2}\right),$$

d. i. mit dem Anfangswerthe. Hieraus sieht man: Durchläuft z eine geschlossene Curve, die den Nullpunkt umgiebt, so kommt ein Functionswerth w_1 der zweideutigen Function $\sqrt{z}$ zu dem Ausgangswerthe zurück oder nicht, je nachdem der Weg der Variabeln den Nullpunkt eine gerade oder ungerade Anzahl Male umkreist.

Beschreibt z eine geschlossene Bahn, die den Nullpunkt nicht einschliesst (3, 4), so wächst φ bis zu einem grössten Werthe XOA, erlangt später einen kleinsten Werth XOB, und kehrt dann zum Anfangswerthe zurück; die End-Amplitude ist also mit der Anfangs-Amplitude identisch. Hieraus schliessen wir: Wenn z eine geschlossene Bahn durchläuft, die den Nullpunkt nicht einschliesst, so kehrt w_1 wieder zum Anfangswerthe zurück.

25. Die Thatsache, dass zu jedem Punkte der Variabelnebene zwei Werthe w gehören, und die damit zusammenhängende, dass geschlossene Wege des Variabelnpunkts die Function $\sqrt{z}$ zum Theil wieder zum Ausgangswerthe zurückführen, zum Theil aber nicht, erschweren die weiteren Betrachtungen. Um diese Schwierigkeit zu beseitigen, hat Riemann*) für die mehrwerthigen Functionen statt der Variabelnebene mehrblätterige Flächen angewandt, die nach ihrem Erfinder als Riemann'sche Flächen bezeichnet werden.

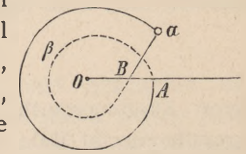
Für die Function $w = \sqrt{z}$ wird die Riemann'sche Variabelnfläche folgendermassen erhalten. Man denke sich eine Schraubenfläche von sehr kleiner Ganghöhe; ihre Achse gehe durch O normal zur XY-Ebene, ihre Spur auf der XY-Ebene mag man sich mit der positiven realen Achse OX zusammenfallend denken. Auf dieser Schraubenfläche durchlaufe man in positiver Richtung von OX beginnend, den ersten und zweiten Umgang, alles andere denke man beseitigt. Der herausgeschnittene Theil hat dann zwei parallele Ränder, die sich von O aus ins Unendliche erstrecken, einer davon ist OX. Nun denke man sich die Ganghöhe verschwindend klein, und deformire die Fläche an den beiden Rändern so, dass dieselben ihrer ganzen Länge nach vereinigt werden, und somit den ersten Umgang durchdringen. Dabei soll die Beschränkung gelten, dass ein Punkt diese Verwachsungslinie nur überschreiten darf, um vom Ende des zweiten Umgangs zum Anfange des ersten zu gelangen oder umgekehrt, nicht aber so, dass er vom Ende des ersten zum Anfange des ersten, oder umgekehrt, übergeht.

Man erhält somit eine zweiblätterige Fläche, welche die XY-Ebene doppelt bedeckt; die beiden Blätter sind längs der Geraden OX von O anfangend verwachsen; diese Linie darf ein Punkt nur so überschreiten, dass er von dem vorderen Theile des oberen Blattes in den hintern Theil des unteren oder von dem hintern Theile des obern in den vordern Theil des unteren übergeht oder umgekehrt. Jeder Punkt a der XY-Ebene ist die Projection zweier in verschiedenen Blättern

*) Riemann's gesammelte math. Werke, herausgeg. von H. Weber, Leipzig 1876, Abhandlung I. und VI.; die Abhandl. VI. findet sich auch in Crelle's Journal, Bd. 54 (1857), pag. 101; vergl. auch Roch, Ueber Functionen complexer Grössen, Schloemilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 8. (1863), pag. 12 u. 183.

liegenden Punkte α_1 und α_2 der zweiblätterigen Variabelnfläche; diese beiden Punkte haben denselben Modulus, ihre Amplituden sind um 2π verschieden*).

Will man von einem Punkte α des obern Blattes auf der Fläche nach einem Punkte β des untern gelangen, so muss man den Windungspunkt O wenigstens einmal umkreisen. Der Weg ist sichtbar bis zum Punkte A, wo er die Verwachsung überschreitet und ins andere Blatt gelangt; von da an ist er verdeckt.



(M. 544.)

Wenn man von α ausgeht und den Nullpunkt zweimal umkreist, so kommt man ins obere Blatt zurück. Will man von α ausgehend eine geschlossene Linie beschreiben, so darf dieselbe den Windungspunkt nicht einschliessen, oder muss ihn zweimal, oder viermal, oder überhaupt eine gerade Anzahl Male umkreisen.

Man setze nun fest, dass für irgend einen von O verschiedenen Punkt α der Riemann'schen Fläche die Function $w = \sqrt{\alpha}$ den einen ihrer Werthe w_1 (und nicht den entgegengesetzt gleichen w_2) haben soll; da nun jede geschlossene Curve auf der Fläche den Windungspunkt gar nicht oder eine gerade Anzahl Male umkreist, so folgt, dass der Werth, den $\sqrt{z}$ in jedem Punkte annimmt, unabhängig von dem Wege ist, auf welchem die Variable zu diesem Punkte von α ausgehend gelangt; die Function $\sqrt{z}$ ist also eine eindeutige Function der Punkte der zweiblätterigen Fläche.

Dieselbe Fläche dient dazu, die Function

$$w = \sqrt{az + b}$$

als eindeutige Function des Ortes in der Fläche darzustellen; nur hat man den Windungspunkt in den Punkt $-b : a$ zu verlegen.

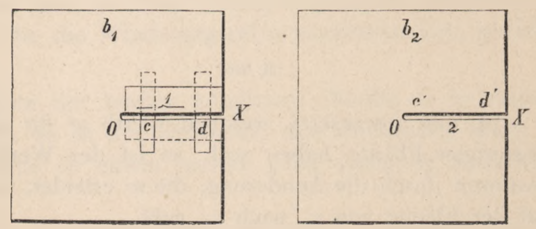
26. Wir construiren nun eine zweiblätterige Riemann'sche Variabelnfläche, für welche die Function

$$w = \sqrt{(z-a)(z-b)}$$

eine eindeutige Function des Ortes in der Fläche ist; wir setzen dabei voraus, dass a und b verschieden sind. Bezeichnet man in der Variabelnebene die Abstände der Punkte a und b von dem variabeln Punkte z mit R und r und die Winkel dieser Geraden und der X-Achse mit Φ und φ, so ist

$$w = \sqrt{R}\left(\cos\frac{\Phi}{2} + i\sin\frac{\Phi}{2}\right) \cdot \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

*) Um ein anschauliches Modell eines Theiles dieser Fläche zu erhalten, schneide man zwei gleiche Stücke Papier b_1 und b_2 und zerschneide sie entlang OX; hierauf lege man sie so auf einander, dass die Schnitte sich decken, und verbinde durch Ueberkleben mit einem Streifen Papier den Rand 1. des obern Blattes mit 2. des unteren. An den Stellen c und d mache man entlang OX kleine Schnitte in den verbindenden Streifen, und schiebe durch dieselbe schmale Papierstreifchen, durch die man nun bei c und c' bez. d und d' durch Ankleben den vordern Rand des obern mit dem hintern Rande des untern verbindet. Die Vorschrift über das Ueberschreiten der Verwachsung findet dann ihren deutlichen Ausdruck darin, dass man auf dem langen Streifen nur von oben 1 nach unten 2, auf den schmalen Stegen nur von oben c und d nach unten c' und d', oder umgekehrt, gelangen kann.



(M. 545.)

Geht nun z von einem Punkte z_0 aus, und auf einer Curve wieder nach z_0 zurück, so erlangt der Faktor

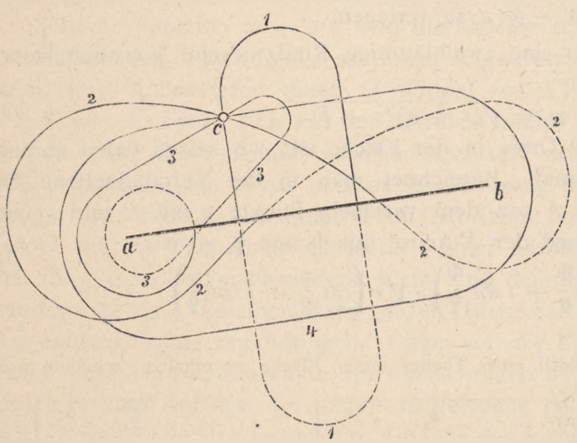
$$\sqrt{R}\cdot\left(\cos\frac{\Phi}{2}+i\sin\frac{\Phi}{2}\right)$$

seinen Ausgangswerth wieder, oder den entgegengesetzt gleichen, je nachdem der Weg des z den Punkt a eine gerade Anzahl Male (Null mit eingerechnet) umkreist, oder eine ungerade; ebenso erreicht dabei der andere Faktor

$$\sqrt{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

seinen Ausgangswerth oder nicht, je nachdem der Punkt b eine gerade oder ungerade Anzahl Male von z umkreist wird. Wenn beide Faktoren ihren Anfangswerth nicht erreichen, also beide am Ende des Weges Werthe angenommen haben, die den Anfangswerthen entgegengesetzt gleich sind, so hat sich ihr Produkt nicht geändert, w also den Ausgangswerth wieder erreicht. Daher erkennt man, dass w den Ausgangswerth wieder erreicht oder nicht, je nachdem der Weg der Variabeln die beiden Punkte a und b zusammengenommen eine gerade Anzahl Male umkreist, oder eine ungerade.

Hiernach ergiebt sich folgende dem Zwecke genügende Riemann'sche Variabelnfläche: Man decke zwei Ebenen auf einander und denke sich dieselben entlang der Geraden ab so verwachsen, dass man von einem Rande der Geraden auf den andern nicht übertreten kann, ohne dabei von dem obern Blatte ins untere zu gelangen oder umgekehrt. Auf dieser Fläche kann man von einem Punkte c aus nur auf solchen Wegen zu c zurückgelangen, die keinen der Windungspunkte a und b umkreisen (z. B. Weg 1), oder einen nach dem andern jeden einmal umkreisen (Weg 2), oder die einen zweimal umkreisen (Weg 3) oder die beide zusammen einmal umkreisen (Weg 4), oder auf Wegen, die sich aus Wegen dieser vier Arten zusammensetzen lassen; in jedem dieser Fälle erlangt w wieder seinen Ausgangswerth.



(M. 546.)

Ist nun festgesetzt, welchen Werth w für irgend einen Punkt z_0 der zweiblätterigen Fläche haben soll, so ist der Werth in jedem Punkt z_1 eindeutig bestimmt durch die Aenderung, die w erleidet, wenn z auf irgend welchem Wege auf der Fläche von z_0 nach z_1 geht.

27. Bezeichnet man für die Function

$$w=\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}$$

mit r_1, r_2, r_3, r_4 die Abstände der Punkte a, b, c, d vom variabeln Punkte z und mit φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 die Winkel der Geraden r_1, r_2, r_3, r_4 mit der positiven realen Achse, so ist

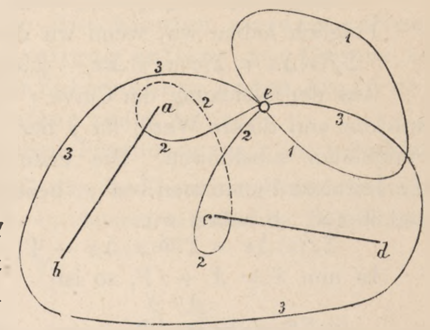
$$w=\sqrt{r_1}\left(\cos\frac{\varphi_1}{2}+i\sin\frac{\varphi_1}{2}\right)\cdot\sqrt{r_2}\left(\cos\frac{\varphi_2}{2}+i\sin\frac{\varphi_2}{2}\right)$$
$$\cdot\sqrt{r_3}\left(\cos\frac{\varphi_3}{2}+i\sin\frac{\varphi_3}{2}\right)\cdot\sqrt{r_4}\left(\cos\frac{\varphi_4}{2}+i\sin\frac{\varphi_4}{2}\right).$$

Beschreibt z auf der Variabeln-Ebene von z_0 aus eine geschlossene Curve, die den Punkt a eine gerade bez. ungerade Anzahl Male umkreist, so bekommt der Faktor

$$\sqrt{r_1}\left(\cos\frac{\varphi_1}{2}+i\sin\frac{\varphi_1}{2}\right)$$

seinen Ausgangswerth, bez. den entgegengesetzt gleichen, und umgekehrt; das Entsprechende gilt für die übrigen Faktoren von w. Wenn daher z eine Bahn beschreibt, die alle die vier Punkte zusammengenommen eine gerade Anzahl Male umkreist, so erlangt w wieder seinen Ausgangswerth; ist aber die Summe der Umkreisungen aller vier Punkte ungerade, so erlangt w nicht den Ausgangswerth wieder. Hieraus erkennt man, dass w eine eindeutige Function des Ortes der Variabelnfläche wird, wenn man dieselbe folgendermaassen construirt: Man legt zwei Ebenen auf einander, und lässt diese entlang einer Geraden verwachsen, die zwei von den Punkten a, b, c, d verbindet, sowie auf der Geraden zwischen den beiden andern; diese beiden Verwachsungen sollen so gewählt sein, dass sie sich nicht schneiden. Betreffs der Ueberschreitung der Verwachsungen sollen dieselben Bestimmungen gelten, wie bei den vorigen Beispielen.

Durchläuft man auf dieser Fläche von einem Punkte e des obern Blattes aus eine Curve, deren Grundriss geschlossen ist, und die keinen der Windungspunkte a, b, c, d umkreist, so führt diese Curve zu e selbst zurück, endet nicht in dem unter e im andern Blatte liegenden Punkte (Weg 1). Wenn man von e ausgehend einen Windungspunkt (a, Weg 2) einmal umkreist, so kommt man in das untere Blatt; um in das obere zurückzugelangen, muss man noch einen Windungspunkt (z. B. c) einmal umkreisen. Ein Weg, der zwei durch eine Verwachsung verbundene Windungspunkte oder alle vier umkreist, kann ganz im obern Blatte liegen (Weg 3)*).



(M. 547.)

Man überzeugt sich so, dass man in dieser Fläche nur solche wirklich geschlossene Linien ziehen kann, die die Windungspunkte zusammen eine gerade Anzahl Male umkreisen.

Ist daher festgesetzt, welchen der beiden möglichen Werthe w in einem Punkte dieser Fläche haben soll, so ist der Endwerth, den w erreicht, wenn z von diesem Punkte auf der Fläche zu einem andern geht, eindeutig bestimmt und vom Wege unabhängig.

Diese Beispiele genügen für die weiteren Betrachtungen, die wir hier durchführen werden.

---

*) Um sich diese Verhältnisse recht deutlich zu machen, zeichne man sich mehrere geschlossene Wege, die die Windungspunkte immer anders umkreisen, und achte darauf, die Wegtheile zu punktiren, soweit sie im untern Blatte liegen.

§ 13. Integrale complexer Functionen.

1. Es sei $f(z)$ eine Function der complexen Variabeln z, und für z eine RIEMANN'sche Variabelnfläche construirt, so dass $f(z)$ eine eindeutige Function der Punkte dieser Fläche ist; ferner seien zwei Punkte z_0 und Z dieser Fläche durch eine in der Fläche liegende Linie l verbunden, und diese Linie durch eine Anzahl Punkte $z_1, z_2, z_3 \ldots z_{n-1}$ getheilt, die in der Richtung von z_0 nach Z auf einander folgen; endlich werde mit $f(z_k)$ der Werth bezeichnet, den $f(z)$ für irgend einen Punkt innerhalb des Linienstücks $z_{k-1}z_k$ annimmt. Unter dem bestimmten Integrale

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\, dz$$

versteht man den Grenzwerth, gegen den die Summe

$$\sum_1^n f(z_k)\Delta z_k\,, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}\,, \quad z_n = Z$$

convergirt, wenn sämmtliche Differenzen Δz_k verschwinden.

2. Wir werden nun zunächst zeigen, dass ein solcher Grenzwerth existirt. Setzen wir $z = x + iy$, so nimmt $f(z)$ nach Sonderung des Realen vom Imaginären die Form an $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ und es ist

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1} = x_k - x_{k-1} + i(y_k - y_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k\,.$$

Folglich haben wir, wenn wir die Indices unterdrücken

$$\Sigma f(z)\Delta z = \Sigma[\varphi(x, y)\,\Delta x - \psi(x, y)\,\Delta y] + i\Sigma[\varphi(x, y)\,\Delta y + \psi(x, y)\,\Delta x]\,.$$

Aus der Gleichung der Curve l wollen wir nun y durch x und x durch y ausdrücken und diesen Werth für y bez. x in die mit Δx bez. mit Δy multiplicirten Functionen substituiren. Die ersteren werden dann Functionen von x allein, die letzteren Functionen von y; bezeichnen wir dieselben mit $\Phi(x)$, $\Phi_1(x)$, $\Psi(y)$, und $\Psi_1(y)$, so haben wir

$$\Sigma f(z)\,\Delta z = \Sigma[\Phi(x)\,\Delta x - \Psi(y)\,\Delta y] + i\Sigma[\Phi_1(x)\,\Delta x + \Psi_1(y)\,\Delta y]\,.$$

Ist nun $Z = X + iY$, so ist

$$lim\,\Sigma\Phi(x)\,\Delta x = \int_{x_0}^{X}\Phi(x)\,dx\,, \quad lim\,\Sigma\Psi(y)\,\Delta y = \int_{y_0}^{Y}\Psi(y)\,dy \quad \text{u. s. w.;}$$

hieraus folgt

$$lim\,\Sigma f(z)\,\Delta z = \int_{x_0}^{X}\Phi(x)\,dx - \int_{y_0}^{Y}\Psi(y)\,dy + i\int_{x_0}^{X}\Phi_1(x)\,dx + i\int_{y_0}^{Y}\Psi_1(y)\,dy\,.$$

Hierdurch ist das Integral

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$$

durch bestimmte Integrale realer Functionen einer realen Variabeln ausgedrückt.

Wir schliessen hieran zwei Sätze, die sich aus der Definition des bestimmten Integrals ohne Weiteres ergeben.

Ist b ein Punkt, der auf dem Integrationswege, d. i. auf dem für die Variable angenommenen Wege, ac zwischen a und c liegt, so ist für die Integration auf dem angenommenen Wege

$$\int_a^b f(z)\,dz + \int_b^c f(z)\,dz = \int_a^c f(z)\,dz\,.$$

Ferner folgt

$$\int_a^b f(z)\,dz = -\int_b^a f(z)\,dz\,.$$

3. Wir haben nun zu untersuchen, welchen Einfluss die Wahl des Integrationsweges auf den Werth des bestimmten Integrals hat.

Es liegt die Vermuthung nahe, dass das zwischen den Grenzen a und b genommene Integral immer andere Werthe erhält, wenn man die Punkte a und b durch verschiedene Integrationswege verbindet; so dass es nöthig wäre, bei jedem Integrale den Ingrationsweg genau anzugeben. Wir werden indess zeigen, dass diess nicht der Fall ist; der Werth des bestimmten Integrals wird sich nur insofern abhängig vom Integrationswege erweisen, als bei gewissen Gruppen von Wegen das Integral um eine bestimmte additive Constante von dem auf andern Wegen erhaltenen Werthe abweicht.

Um zu diesen Ergebnissen zu gelangen, beweisen wir folgenden Satz: Sind X und Y zwei innerhalb eines vollständig begrenzten Theiles T einer RIEMANN'schen Fläche endliche und eindeutige Functionen des Ortes in der Fläche, so ist das über die Fläche T erstreckte Integral

$$\int\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dT$$

entgegengesetzt gleich dem über alle Punkte der Begrenzung von T ausgedehnten Integrale

$$\int(X dx + Y dy)\,,$$

wobei alle Theile der Begrenzung so durchlaufen werden sollen, dass die Fläche T gegen die Fortschreitung entlang der Grenze so liegt, wie der $+i$ enthaltene Theil der Zahlenebene gegen die in der Richtung wachsender Zahlen durchlaufene reale Achse.

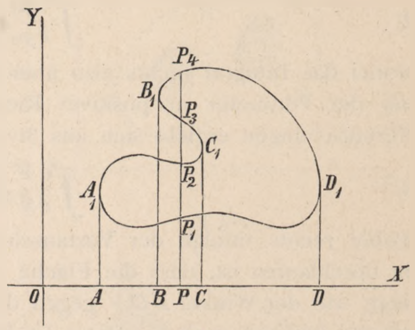
Wir wollen uns zunächst unter X und Y reale Functionen von x und y denken.

Wir betrachten zuerst ein Flächenstück T, das die Ebene nur einfach bedeckt und einfach zusammenhängend ist, d. i., dessen vollständige Begrenzung eine einzige geschlossene Curve bildet. Das über T ausgedehnte Integral zerlegen wir in die Differenz zweier Integrale

$$\int\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dT = \int\frac{\partial X}{\partial y}\,dT - \int\frac{\partial Y}{\partial x}\,dT\,,$$

und berechnen die Summanden einzeln. Nun ist

$$\int\frac{\partial X}{\partial y}\,dT = \int\!\!\int\frac{\partial X}{\partial y}\,dx\,dy\,.$$



(M. 548.)

Hierbei ist die Integration nach y auf jeder Parallelen zur Y-Achse über die Strecken auszudehnen, die im Innern von T liegen, für $x = OP$ also über P_1P_2 und P_3P_4. Sind die Werthe, welche die Function X in den Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 hat, der Reihe nach X_1, X_2, X_3, X_4, und bemerken wir, dass bei unbestimmter Integration

$$\int\frac{\partial X}{\partial y}\,dy = X + C\,,$$

so ergiebt sich für das über die Strecken P_1P_2 und P_3P_4 ausgedehnte bestimmte Integral

$$\int\frac{\partial X}{\partial y}\,dy = X_2 - X_1 + X_4 - X_3\,.$$

Hierbei wird von der Voraussetzung Gebrauch gemacht, dass X für alle Punkte im Innern der Fläche endlich bleibt; denn wenn X z. B. für einen Punkt innerhalb der Strecke $P_1 P_2$ unendlich wird, so ist das über die Strecke ausgedehnte Integral im Allgemeinen nicht gleich $X_2 - X_1$.

Daher ist nun weiter

$$\int \frac{\partial X}{\partial y} dT = \int (X_2 - X_1 + X_4 - X_3)\, dx.$$

$$= -\int X_1\, dx + \int X_2\, dx - \int X_4\, dx + \int X_3\, dx.$$

Die Grenzen der einzelnen Integrale erhalten wir, indem wir die zur Y-Achse parallelen Tangenten der Umgrenzung ziehen; haben dieselben die Abscissen OA, OB, OC, OD, so ist

$$\int \frac{\partial X}{\partial y} dT = -\int_{OA}^{OD} X_1\, dx + \int_{OA}^{OC} X_2\, dx - \int_{OB}^{OC} X_3\, dx + \int_{OB}^{OD} X_4\, dx.$$

Im zweiten und vierten Integrale vertauschen wir die Grenzen und erhalten bei etwas veränderter Anordnung

1. $$\int \frac{\partial X}{\partial y} dT = -\left(\int_{OA}^{OD} X_1\, dx + \int_{OD}^{OB} X_4\, dx + \int_{OB}^{OC} X_3\, dx + \int_{OC}^{OA} X_2\, dx\right).$$

Durchläuft ein Punkt den Perimeter von T in positiver Richtung von A_1 anfangend, so erhält X auf dem Wege $A_1 D_1$ Werthe, die mit X_1 bezeichnet sind; die auf dem Wege $D_1 B_1$ sind mit X_4 bezeichnet, die auf $B_1 C_1$ mit X_3, die auf $C_1 A_1$ mit X_2. Wir können daher in 1. die Indices bei X_1, X_2, X_3, X_4 weglassen und alle Integrale vereinigen; hierdurch entsteht

2. $$\int \frac{\partial X}{\partial y} dT = -\int X dx,$$

wobei das Integral rechts also über den Perimeter von T auszudehnen und dabei der Perimeter in positiver Richtung zu durchlaufen ist. Durch geeignete Vertauschungen ergiebt sich aus 3.

3. $$\int \frac{\partial Y}{\partial x} dT = -\int Y dy,$$

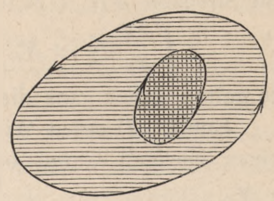
wobei rechts infolge der Vertauschung von x gegen y der Perimeter von T so zu durchlaufen ist, dass die Fläche T gegen die Richtung der Fortschreitung so liegt, wie der Winkel XOY gegen die in der Richtung der wachsenden y zurückgelegte Ordinatenachse. Diese Umlaufsrichtung ist der des Begrenzungsintegrals in 2. entgegengesetzt. Wechseln wir in 3. die Umlaufsrichtung, so wechseln alle einzelnen Bestandtheile, aus denen dasselbe zu berechnen ist, (so wie $\int X dx$ sich nach Gleichung 1. berechnet) die Grenzen, nehmen also den entgegengesetzt gleichen Werth an; durchläuft man den Perimeter von T in positiver Richtung, so hat man daher

4. $$\int \frac{\partial Y}{\partial x} dT = \int Y dy.$$

Aus 2. und 4. folgt schliesslich

5. $$\int \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dT = -\int (X dx + Y dy), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Wir beweisen nun den Satz für eine die Ebene allenthalben einfach bedeckende Fläche T_1 deren Begrenzung aus mehreren getrennten Curven besteht. Wir denken uns aus der einfach zusammenhängenden (wagerecht schraffirten) Fläche T_1 eine einfach zusammenhängende (senkrecht schraffirte) T_2 herausgeschnitten. Wird die übrig bleibende, ringförmige Fläche mit T bezeichnet, so ist



(M. 549.)

$$\int_T \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dT = \int_{T_1} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dT - \int_{T_2} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dT$$

wobei durch die Zeichen

$$\int_T, \quad \int_{T_1}, \quad \int_{T_2}$$

angedeutet wird, dass die Integration über die Flächen T, T_1, T_2 erstreckt werden soll. Nun ist nach dem vorigen Beweise

$$\int_{T_1} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dT = -\int (X dx + Y dy),$$

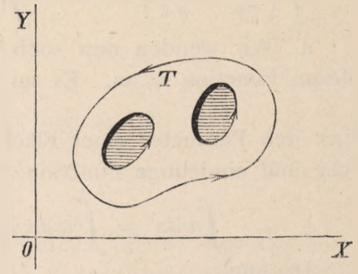
ausgedehnt über den Perimeter von T_1 in positiver Umlaufsrichtung; und

$$\int_{T_2} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dT = \int (X dx + Y dy)$$

ausgedehnt über den Perimeter von T_2 in negativer Umlaufsrichtung in Bezug auf T_2, mithin in positiver in Bezug auf die Ringfläche T_1, zu deren Begrenzung der Perimeter von T_2 gehört. Daher haben wir für T

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dT = -\int (X dy + Y dy)$$

wobei nun das Begrenzungsintegral rechts über die ganze Begrenzung von T in positiver Richtung (in Richtung der Pfeile) zu erstrecken ist.

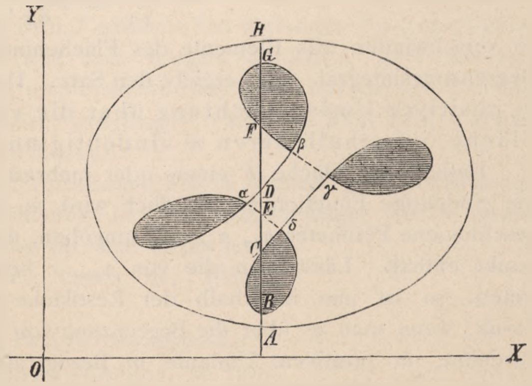


(M. 550.)

Wenn aus einer einfach zusammenhängenden, die Ebene allenthalben einfach bedeckenden Fläche mehrere Stücke herausgeschnitten werden, so findet man in gleicher Weise die Gültigkeit des Satzes.

Bei der unschraffirten Fläche T (Fig. 550) ist das Begrenzungsintegral über die drei Begrenzungscurven, bei jeder in der Pfeilrichtung, zu erstrecken.

Die Fläche T in Fig. 551 ist aus einer zweiblättrigen RIEMANN'schen Fläche mit vier Windungspunkten geschnitten (§ 12, No. 27); sie bedeckt zum Theil die Ebene doppelt, nämlich innerhalb des Grundrisses $\alpha\beta\gamma\delta$. Ist AH parallel der Y-Achse, so ist bei der Integration nach y das Integral über



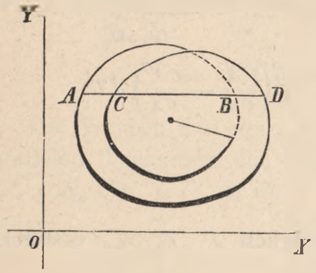
(M. 551.)

die Strecken AB, CD (im obern Blatte), EF und GH zu erstrecken; folglich ist

$$\int \frac{dX}{dy}\,dy = X_B - X_A + X_D - X_C + X_F - X_E + X_H - X_G\,;$$

es gelten daher ganz die vorigen Betrachtungen und Schlüsse.

Enthält T einen Windungspunkt einer zweiblätterigen Fläche und wird von einer einzigen Curve begrenzt, so ist für die Integration nach x entlang der Parallelen AD zur X-Achse das Integral im oberen Blatte über die Strecke CD, im untern über AB zu erstrecken, es ergiebt sich mithin



(M. 552.)

$$\int \frac{dy}{dx}\,dx = Y_B - Y_A + Y_D - Y_c\,;$$

alles Uebrige folgt dann wie vorher.

Wir können nun den Satz mit Leichtigkeit auf den Fall ausdehnen, dass X und Y complexe Functionen sind.

Haben wir $X = R + iS$, $\quad Y = U + iV$, so ist

$$\int\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dT = \int\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x}\right) dT + i\int\left(\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) dT.$$

Wenden wir den Satz auf die realen Functionen R, S, U, V an, so erhalten wir

$$\int\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x}\right) dT = -\int(Rdx + Udy)\,,\quad \int\left(\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) dT = -\int(Sdx + Udy)\,.$$

Daher folgt schliesslich

$$\int\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dT = -\int[(R + iS)\,dx + (U + iV)\,dy]\,, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

4. Wir wenden den soeben bewiesenen Satz auf das Integral einer complexen Function w an. Es sei

$$\int wdz$$

über den Perimeter einer Fläche T ausgedehnt, innerhalb welcher w eine endliche und eindeutige Function des Ortes in der Fläche ist; alsdann ist

$$\int wdz = \int(wdx + iwdy) = -\int\left(\frac{\partial w}{\partial y} - i\frac{\partial w}{\partial x}\right) dT.$$

Da nun

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x}\,,$$

so verschwinden alle Elemente des Flächenintegrals, also auch das ihm gleiche Begrenzungsintegral. Dies ergiebt den Satz: *Das Integral $\int wdz$, ausgedehnt in positiver Umlaufsrichtung über die vollständige Begrenzung einer Fläche, innerhalb deren w eindeutig und endlich ist, ist gleich Null.*

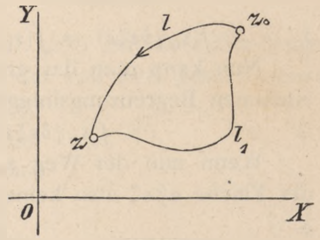
Enthält die Fläche T einen oder mehrere Unstetigkeitspunkte, für welchen die eindeutige Function w unendlich wird, so kann man dieselben durch kleine geschlossene Perimeter α_1, α_2, ... umgeben, deren jeder nur einen Unstetigkeitspunkt enthält. Lässt man die von α_1, .. begrenzten Flächentheile aus T austreten, so ist nun innerhalb der Restfläche w endlich; mithin verschwindet $\int wdz$, wenn man es über die Begrenzung von T und über die Perimeter α_1, α_2 .. ausdehnt, in positivem Umlaufe in Bezug auf die Restfläche, also die über α_1, α_2, ... ausgedehnten Integrale in negativer Richtung bezüglich der ausgeschlossenen Flächen. Hieraus folgt: *Wird das Integral $\int wdz$ über den*

Perimeter einer Fläche T erstreckt, welche Unstetigkeitspunkte enthält, so ist der Werth dieses Integrals gleich der Summe von Integralen $\int wdz$, die in positiver Richtung um die Perimeter kleiner, je einen Unstetigkeitspunkt enthaltender Flächentheile erstreckt sind.

Dieser Satz lehrt $\int wdz$ für den Fall zu finden, dass T Unstetigkeitspunkte enthält; wir werden nämlich jeden solchen Punkt durch einen kleinen Kreis umgeben, wenn er kein Windungspunkt ist; ist er Windungspunkt einer zweiblätterigen Riemann'schen Fläche, so umgeben wir ihn mit einer geschlossenen Linie, deren Grundriss ein Kreis ist, die also von z beschrieben wird, wenn r constant ist und φ von 0 bis 4π wächst; zur Berechnung dieser Integrale können wir r so klein nehmen wie wir wollen, und daher insbesondere einen verschwindend kleinen Werth von r voraussetzen.

5. Wir kehren nun zum Ausgangspunkte unserer Untersuchung zurück, zu der Frage, welchen Einfluss die Wahl des Integrationsweges (N. 3) auf den Werth des Integrals

$$\int_{z_0}^{z} wdz$$



(M. 553.)

hat. Führt man die Variabele auf zwei Wegen l und l_1 von z_0 nach z, die einen Theil einer Riemann'schen Fläche vollständig begrenzen, innerhalb dessen keine Unstetigkeitspunkte liegen, so verschwindet das über die ganze Begrenzung genommene Integral. Dasselbe zerfällt in das in der Richtung $z_0 z$ über l und in das in der Richtung zz_0 über l_1 genommene. Deuten wir die Wege durch eingeklammerte Buchstaben vor dem Integralzeichen an, so ist also

1. $$(l)\int_{z_0}^{z} wdz + (l_1)\int_{z}^{z_0} wdz = 0\,.$$

Da nun $\quad (l_1)\int_{z}^{z_0} wdz = -(l_1)\int_{z_0}^{z} wdz$, so folgt aus 1.:

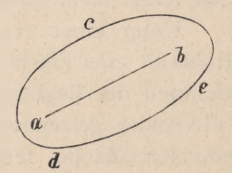
$$(l)\int_{z_0}^{z} wdz = (l_1)\int_{z_0}^{z} wdz\,.$$

Wenn zwei Integrationswege einen Theil T einer Riemann'schen Fläche vollständig begrenzen und innerhalb desselben kein Unstetigkeitspunkt liegt, so hat das Integral für beide Wege denselben Werth.

Ferner erkennen wir sofort: *Wenn T einen oder mehrere Unstetigkeitspunkte enthält, so sind die auf den Wegen l und l_1 gewonnenen Integrale um gewisse Constanten verschieden, nämlich um die Werthe von Integralen über die Perimeter hinlänglich kleiner Flächen, welche je einen Unstetigkeitspunkt enthalten.*

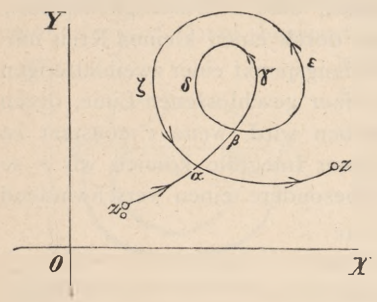
In einer *einblätterigen* ununterbrochenen Fläche begrenzt jede geschlossene Curve einen Theil der Fläche vollständig; in einer zweiblätterigen Fläche lassen sich geschlossene Linien ziehen, die für sich allein nicht die vollständige Begrenzung eines Theils der Fläche bilden.

Hat die zweiblätterige Fläche zwei Windungspunkte a und b und zwischen ihnen die Verwachungslinie, so kann man im oberen (oder im unteren) Blatte eine geschlossene Curve cde ziehen, die beide Windungspunkte einschliesst.



(M. 554.)

Diese Linie theilt die zweiblättrige Fläche in zwei Theile, die beide unendlich gross sind; der eine ist der ausserhalb *cde* liegende Theil des Blattes, der andere ist das untere Blatt vermehrt um den innerhalb *cde* liegenden Theil des oberen, der mit dem unteren entlang *ab* zusammenhängt. Bei beiden Theilen gehört zur vollständigen Begrenzung ausser *cde* noch eine die unendlich fernen Punkte enthaltende geschlossene Linie.



(M. 555.)

6. Wenn der Integrationsweg $z_0 z$ sich selbst ein- oder mehrmals schneidet, so kann man geeignete Zerlegungen vornehmen, die wir an einem Beispiele (Fig. 555) zeigen. Dabei wollen wir mit $\int(A, B, C \ldots N)$ das entlang einer vorgeschriebenen Curve $A, B, C \ldots N$ von A bis N erstreckte Integral von $w\,dz$ verstehen. Es ist

1. $$\int(z_0\gamma\delta\varepsilon\zeta z) = \int(z_0\alpha) + \int(\alpha\beta) + \int(\beta\gamma\delta\beta) + \int(\beta\varepsilon\zeta\alpha) + \int(\alpha z).$$

Nun kann man das erste und letzte, sowie das zweite und dritte Integral zu einfachen Begrenzungsintegralen zusammenfassen und hat

2. $$\int(z_0\gamma\delta\varepsilon\zeta z) = \int(z_0\alpha z) + \int(\alpha\beta\varepsilon\zeta\alpha) + \int(\beta\gamma\delta\beta).$$

Wenn nun der Weg $z_0\gamma\delta\varepsilon\zeta z$ keinen Unstetigkeitspunkt umkreist, innerhalb der Fläche $\alpha\beta\varepsilon\zeta$ also keiner liegt, so sind die Begrenzungsintegrale

3. $$\int(\alpha\beta\varepsilon\zeta\alpha) = \int(\beta\gamma\delta\beta) = 0,$$

und es ist daher

$$\int(z_0\gamma\delta\varepsilon\zeta z) = \int(z_0\alpha z).$$

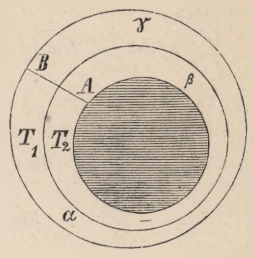
Wenn der Weg einen oder mehrere Unstetigkeitspunkte umkreist, so sind die Integrale 3. gleich Integralen, die in derselben Umlaufsrichtung über die Perimeter von beliebig kleinen je einen Unstetigkeitspunkt einschliessenden Flächen erstreckt sind.

Hieraus erkennt man: Wenn eine geschlossene Curve sich selbst schneidet, so ist das über dieselbe erstreckte Integral $\int w\,dz$ gleich Null, wenn die Curve keinen Unstetigkeitspunkt umkreist; werden von der Curve Unstetigkeitspunkte theils in positiver, theils in negativer Richtung umkreist, so ist das Integral gleich der Summe von Integralen, jedes über den Perimeter einer je einen Unstetigkeitspunkt enthaltenen beliebig kleinen Fläche in demselben Sinne erstreckt, in welchem die Curve den Punkt umkreist, mit der Anzahl der Umläufe multiplicirt, welche die Curve um den betreffenden Unstetigkeitspunkt macht.

7. Wir entwickeln nun einen Begriff, der für die weiteren Untersuchungen von Bedeutung wird, nämlich den des einfachen oder mehrfachen Zusammenhangs einer vollständig begrenzten Fläche (wobei Begrenzungen durch einen mit unendlich grossem Radius um ein im Endlichen liegendes Centrum beschriebenen Kreis nicht ausgeschlossen werden sollen).

Unter einer einfach zusammenhängenden Fläche verstehen wir nach Riemann eine Fläche, die durch jeden Querschnitt, d. i. durch jede zwischen zwei Punkten der Begrenzung verlaufende sich selbst nicht schneidende Linie in zwei vollständig getrennte Theile zerlegt wird. Einfach zusammenhängend ist z. B. eine Kreisfläche, ferner der Theil einer zweiblätterigen Fläche, der durch eine geschlossene sich selbst nicht schneidende Curve vollständig begrenzt wird.

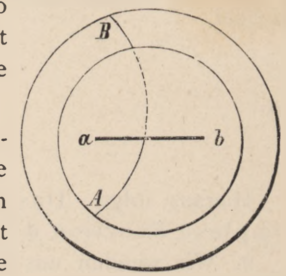
In einer einfach zusammenhängenden Fläche ist jede geschlossene Linie die vollständige Begrenzung eines Theils der Fläche. Denn gesetzt, die geschlossene Curve α zerlege die Fläche T in zwei Theile, T_1 und T_2, von deren keinen sie die vollständige Begrenzung bildet, so muss der eine T_2 noch eine innere β, der andere T_1 noch eine äussere Grenzcurve γ haben, die sich nicht treffen. Zieht man nun von einem Punkte A auf β nach einem Punkte B auf γ eine Linie auf der Fläche, die sich nicht schneidet, so wird durch dieselbe die Fläche nicht zerstückt, folglich kann T nicht einfach zusammenhängend sein.



(M. 556.)

Eine Fläche heisst zweifach zusammenhängend, wenn sie durch einen einzigen Querschnitt in eine einfach zusammenhängende verwandelt werden kann, z. B. die Fläche T in Fig. 556; denn sie wird durch AB in eine einfach zusammenhängende verwandelt.

Zweifach zusammenhängend ist ferner der Theil einer mit zwei Windungspunkten a und b versehenen zweiblätterigen Fläche, der von zwei geschlossenen Linien begrenzt wird, die in den beiden Blättern so liegen, dass jede die Verwachsungslinie einmal umkreist (Fig. 557); der Querschnitt AB verwandelt sie in eine einfach zusammenhängende.



(M. 557.)

Eine Fläche heisst drei-, vier- u. s. w. fach zusammenhängend, wenn sie durch zwei, drei u. s. w. Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt werden kann. Hierbei soll jeder bereits hergestellte Querschnitt zur Begrenzung der Fläche gerechnet, durch weitere Querschnitte also nicht überschritten werden.

Die Fläche in Fig. 551 ist dreifach zusammenhängend; denn zieht man im oberen Blatte den Querschnitt CD, und im unteren EF, so erhält man eine einfach zusammenhängende Fläche.

Wenn die Function w für alle Punkte einer einfach zusammenhängenden Fläche T eindeutig und endlich ist, so ist das über irgend eine geschlossene Curve der Fläche ausgedehnte Integral $\int w\,dz$ gleich Null, und das entlang irgend einer auf der Fläche liegenden Curve genommene Integral

$$\int_{z_0}^{z} w\,dz$$

ist unabhängig vom Integrationswege; ist z_0 eine absolute Constante, so ist das Integral daher eindeutig bestimmt für jeden (die obere Grenze bildenden) Punkt z der Fläche.

8. Wird der Integrationsweg l des Integrals

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

über den Endpunkt z hinaus bis zu einem in irgend welcher Richtung liegenden hinlänglich nahen Punkte $z + \Delta z$ so verlängert, dass die Zunahme des Wegs und die des Integrals mit Δz verschwindet (also innerhalb der Verlängerung kein Unstetigkeitspunkt umkreist oder getroffen wird), so hat man

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = lim\,[f(z_1)(z_1 - z_0) + f(z_2)(z_2 - z_1) + \ldots + f(z)(z - z_{n-1})]\,,$$

$$\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,dz = lim\,[f(z_1)(z_1 - z_0) + f(z_2)(z_2 - z_1) + \ldots + f(z)(z - z_{n-1})]$$
$$+ f(z + \Delta z)(z + \Delta z - z)]\,.$$

Bildet man die Differenz beider Werthe und geht zur Grenze für ein verschwindendes Δz über, so erhält man

$$lim\,\Big[\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z)\,dz - \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz\Big] : \Delta z = f(z) \quad \text{d. i.}$$

1. $$\frac{d}{dz}\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = f(z)\,.$$

Der Differentialquotient des Integrals nach der oberen Grenze ist somit unabhängig von der Richtung, in welcher $z + dz$ gegen z liegt; wählt man diese Richtung einmal parallel der realen und dann parallel der imaginären Achse, so hat man nach 1., wenn man zur Abkürzung das Integral mit w bezeichnet,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = i\,\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z}\,,$$

also

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\,\frac{\partial w}{\partial x}\,.$$

Hieraus folgt: Das Integral einer complexen Function ist eine complexe Function der oberen Grenze.

9. Wir wenden uns nun zu einer werthvollen Anwendung der entwickelten allgemeinen Sätze.

Es sei l die vollständige Begrenzung einer Fläche T, und im Innern von T sei die Function $f(z)$ eindeutig und endlich; ferner sei t ein im Innern dieser Fläche gelegener Punkt, der nicht zugleich Windungspunkt ist. Alsdann hat die Function

$$\frac{f(z)}{z - t}$$

auf T nur den einen Unstetigkeitspunkt t, in welchem sie unendlich gross wird. Das Integral

$$\int \frac{f(z)}{z - t}\,dz\,,$$

ausgedehnt über die Begrenzung von T, ist dann gleich dem Integrale derselben Function, ausgedehnt über die Begrenzung einer beliebig kleinen Fläche, innerhalb deren der Unstetigkeitspunkt t liegt. Wir wählen zu dieser kleinen Fläche einen Kreis mit hinlänglich kleinem Radius ρ und dem Centrum t, setzen für Punkte dieses Kreises

$$z - t = \rho\,(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)$$

und gehen auf dem Kreise von z zu einem unendlich nahen Punkte $z + dz$ über; dann ist

$$\begin{aligned} dz &= \rho\,(-\,sin\,\varphi + i\,cos\,\varphi)\,d\varphi\,,\\ &= i\,\rho\,(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)\,d\varphi\,,\\ &= i\,(z - t)\,d\varphi\,. \end{aligned}$$

Daher ist für die Integration entlang des Kreises

Breslau. Eduard Trewendt's Buchdruckerei (Setzerinnenschule).